

Приложение к журналу

КВАНТ

№3/94

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

МЕХАНИКА

Бюро



Квантум

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

М Е Х А Н И К А

*Под редакцией
В.В.Можаева и А.И.Черноуцана*



Москва 1994
Бюро «Квантум»

**П69 Практикум абитуриента: Механика / Под ред.
В. В. Можаяева и А. И. Черноуцана.— М.: Бюро
Квантум, 1994.— 128 с. (Прил. к журналу «Квант»
№ 3/94)**

Книга представляет собой сборник статей по механике, опубликованных в разные годы в журнале «Квант» в разделе «Практикум абитуриента» по физике. Каждая статья — как бы урок по решению задач определенного типа, объединенных какой-либо общей идеей. На разных примерах показывается, как надо подходить к решению задач данного типа, как избежать ошибок и ловушек, как проанализировать ответ и т. д.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для всех тех, кто самостоятельно готовится к конкурсным экзаменам.

ББК 22.2

ISBN 5—85843—004—X

© Бюро Квантум
«Квант», 1994

В этой книге представлена одна из самых традиционных рубрик журнала «Квант» — «Практикум абитуриента». Цель этого раздела — помочь абитуриенту научиться решать задачи.

Каждая статья «Практикума» — это как бы урок по решению задач определенного типа, объединенных какой-либо общей идеей. Обычно это задачи из конкретного раздела физики, но иногда объединяющим «стержнем», на который «нанизываются» задачи, служит какой-нибудь универсальный прием или подход, применимый к задачам из разных разделов (выбор удобной системы отсчета, анализ размерностей, метод качественных оценок и т. д.). Ведущий урок «учитель» — автор статьи — на разных примерах показывает, как надо подходить к решению задач данного типа, как избежать ошибок и ловушек, как проанализировать ответ.

Важный совет — не идите по пути наименьшего сопротивления, просто читая текст, пассивно следуя за мыслью автора, а работайте над статьей «с карандашом в руках», сначала пытайтесь решить задачу самостоятельно и только потом сверяя свое решение с авторским. Так, конечно, получится дольше, но зато гораздо эффективнее. И еще. «Проработав» статью, обязательно попробуйте решить предложенные в конце упражнения — вы поймете, насколько вам удалось овладеть материалом.

Эта книга посвящена механике, но мы планируем в дальнейшем выпустить еще несколько сборников «Практикума абитуриента», куда войдут статьи из других разделов физики.

Как вы решаете задачи на кинематику? Сколько формул вы помните: 5, 10, 15? Очень часто абитуриенты начинают решение задачи с выписывания большого количества формул — формулы для пути, пройденного телом за t -ю секунду, формулы для отношения путей, пройденных телом за последовательные равные промежутки времени, формулы для разности квадратов скоростей тела и так далее. Затем эти формулы пытаются подставлять друг в друга, делить, умножать... Иногда таким способом удается найти ответ, но чаще задачи на кинематику — непреодолимая преграда. Это, пожалуй, один из самых трудных разделов для абитуриентов, хотя должен быть одним из самых простых. Давайте разберемся.

Будем сначала говорить о прямолинейном движении тела (а под телом понимать материальную точку). Если прямую, вдоль которой оно движется, принять за ось координат OX (точка O — начало координат), то положение тела определяется его координатой x . При движении с постоянным ускорением координата тела меняется со временем по закону

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (1)$$

где x_0 — начальная координата тела (при $t=0$), v_0 — его начальная скорость и a — ускорение. Уравнение (1) и есть первое кинематическое уравнение равноускоренного движения тела. Точнее сказать — проекция на ось OX векторного уравнения для радиуса-вектора \vec{r} , определяющего положение тела (рис. 1). Поэтому проекции тех векторных величин, которые направлены

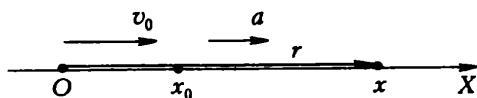


Рис. 1

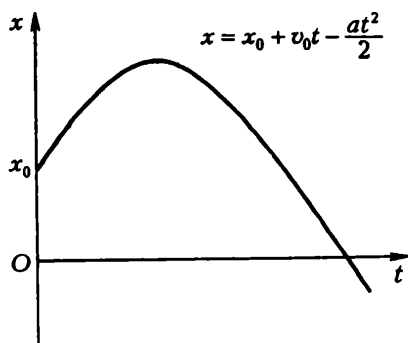


Рис. 2

так же, как ось OX , положительны, а тех, которые направлены в противоположную сторону, — отрицательны. Это нужно учитывать.

Подчеркнем: уравнение (1) — уравнение для координаты тела, а не для пути, пройденного им. Путь — положительная скалярная величина, которая не может уменьшаться. В то же время координата тела может вести себя как угодно. Например, если v_0 положительно и a отрицательно (вектор скорости направлен в ту же сторону, что и ось OX , а вектор ускорения — в противоположную), то координата тела вначале будет увеличиваться, а затем уменьшаться. Это сразу видно из графика зависимости x от t (рис. 2). Через некоторое время после начала движения координата станет отрицательной. Только в том случае, когда тело движется в одну сторону, путь, пройденный телом, равен абсолютному значению изменения его координаты. Поэтому, если нам нужно найти путь, пройденный телом за какое-то время, приходится разбивать движение на участки, на которых тело двигалось в одну сторону, находить изменения координаты тела на этих участках и складывать их абсолютные величины. Но в этом нет необходимости, если нас интересуют другие величины — координата, время, ускорение. Нужно просто воспользоваться кинематическим уравнением движения (1).

Решим с его помощью следующую задачу.

Задача 1. Камень брошен вертикально вверх. Через какое время он упадет на землю?

Выберем ось координат, направленную вертикально вверх, с началом координат, связанным с землей. В этом случае $x_0 = 0$, $v_0 > 0$ и $a = -g < 0$. Поэтому

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения камня на землю $x=0$. Подставляя это значение в кинематическое уравнение движения, получим уравнение

$$gt^2 - 2v_0t = 0,$$

решая которое, найдем

$$t_1 = 0, t_2 = \frac{2v_0}{g}.$$

Значение $t_1 = 0$ соответствует моменту бросания камня, а t_2 — это время движения камня.

Конечно, уравнение движения определяет координату тела в любой момент времени. Воспользовавшись этим, найдем, например, тот момент, когда камень находился на высоте h . Подставляя в уравнение движения $x=h$, получим

$$h = v_0t - \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g},$$

$$t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

На высоте h тело было дважды — в момент t_1 при подъеме и в момент t_2 при спуске (конечно, $2gh \leq v_0^2$, так как максимальная высота подъема тела $h_{\max} = v_0^2/(2g)$).

Часто нам нужно знать скорость тела в разные моменты времени. Если тело движется прямолинейно и равноускоренно, то для проекции скорости на ось OX имеем

$$v = v_0 + at. \quad (2)$$

Это второе кинематическое уравнение движения — уравнение скорости. Оно, конечно, тоже справедливо во все время движения тела (если только ускорение было постоянным).

Найдем, например, скорость камня из предыдущей задачи в момент падения на землю. В этом случае $a = -g$, $t = 2v_0/g$. Поэтому

$$v(t) = v_0 - g \frac{2v_0}{g} = -v_0,$$

т. е. в момент падения на землю скорость камня равна начальной, но направлена в противоположную сторону.

Уравнение (2) позволяет также легко найти время t_n макси-

мального подъема камня. Так как в этой точке скорость камня равна нулю, получаем

$$0 = v_0 - gt_n.$$

Отсюда

$$t_n = \frac{v_0}{g}$$

— время подъема камня равно половине времени полета.

Мы видим, что два уравнения — для координаты и для скорости — позволяют получить ответ на любой вопрос относительно движения тела. Именно их и нужно всегда помнить.

Решим еще одну задачу.

Задача 2. *Свободно падающее тело за последнюю секунду прошло $1/3$ своего пути. Сколько секунд и с какой высоты падало тело?*

Примем за начало координат точку бросания, а ось координат направим вертикально вниз. Тогда координата тела зависит от времени по закону

$$x = \frac{gt^2}{2}$$

($x_0=0$, $v_0=0$, $a=g$). Если тело падало n секунд, время падения равно $n\tau$, где $\tau=1$ с, и высота падения

$$h = \frac{gn^2\tau^2}{2}.$$

Через время $(n-1)\tau$ после начала движения координата тела была равна $2/3h$, т. е.

$$\frac{2}{3}h = \frac{g(n-1)^2\tau^2}{2}.$$

Решая два последних уравнения совместно, найдем

$$n\tau \approx 5,45 \text{ с}, \quad h \approx 145,5 \text{ м}.$$

Можно было выбрать и другую систему координат, например связанную с землей и с осью координат, направленной вверх. Тогда уравнение движения тела было бы таким:

$$x = h - \frac{gt^2}{2}$$

($x_0=h$, $v_0=0$, $a=-g$). Здесь при $t=n\tau$ $x=0$, а при $t=(n-1)\tau$ $x=1/3h$.

Можно выбрать и еще одну систему координат — с началом в точке бросания и осью, направленной вверх. В этой системе

$$x = -\frac{gt^2}{2}.$$

При $t = n\tau$ $x = -h$, при $t = (n-1)\tau$ $x = -2/3h$.

В этой задаче выбор системы координат не очень существен, но часто, удачно выбрав систему координат, можно значительно упростить решение.

Рассмотрим, например, такую задачу.

Задача 3. *С каким промежутком времени τ оторвались от крыши две дождевые капли, если через время t_1 после начала падения второй капли расстояние между каплями было l ?*

Эту задачу можно, конечно, решать в системе координат, связанной с крышей (сделайте это сами). Но удобнее перейти к системе координат, связанной со второй каплей. Так как капли падают с одинаковыми ускорениями относительно земли, то их относительное ускорение равно нулю: капли движутся друг относительно друга равномерно. Их относительная скорость равна скорости первой капли относительно земли в момент отрыва второй капли.

Уравнение движения первой капли в системе координат, связанной со второй каплей, выглядит так:

$$x = x_0 + v_0 t,$$

где $x_0 = g\tau^2/2$, $v_0 = g\tau$. При $t = t_1$ $x = l$, т. е.

$$l = \frac{g\tau^2}{2} + g\tau t_1.$$

Откуда получим ответ:

$$\tau = \sqrt{t_1^2 + \frac{2l}{g}} - t_1.$$

Обсудим еще такую задачу.

Задача 4. *Снаряд, выпущенный вертикально вверх, взрывается в верхней точке траектории. На какой поверхности будут находиться осколки снаряда через некоторое время t после взрыва?*

В системе координат, связанной с точкой взрыва снаряда и движущейся с тем же ускорением относительно земли, что и снаряд, осколки снаряда движутся равномерно. Поэтому через время t каждый из них будет находиться на расстоянии $v_0 t$ от начала координат (v_0 — скорость осколков в нашей системе координат), т. е. все они будут располагаться на сфере радиусом $v_0 t$, свободно падающей на землю.

Попробуйте самостоятельно решить эту задачу в системе координат, связанной с землей.

В заключение разберем случай, когда тело движется по криволинейной траектории с постоянным ускорением \vec{a} . В этом случае, спроектировав скорость \vec{v}_0 и ускорение \vec{a} тела на два взаимно перпендикулярных направления — на оси OX и OY , получим два однотипных уравнения для координат:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

и два уравнения для проекций скорости тела:

$$v_x = v_{0x} + a_x t,$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Решим с помощью этих уравнений следующую задачу.

Задача 5. Самолет летит горизонтально на высоте h со скоростью v_0 . Летчик должен сбросить выпел в точку, находящуюся впереди самолета. Под каким углом к горизонту он должен видеть цель в момент сбрасывания выпела? Сопротивление воздуха не учитывать.

Выберем неподвижную относительно земли систему координат с началом в точке, в которой находился самолет в момент сбрасывания выпела (рис. 3). Начальная скорость выпела равна v_0 и направлена горизонтально, а ускорение равно g и направлено вдоль оси OY . Поэтому

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

В момент t_1 падения выпела на землю в выбранной нами системе координат $x=s$, а $y=h$ (см. рис. 3), следовательно,

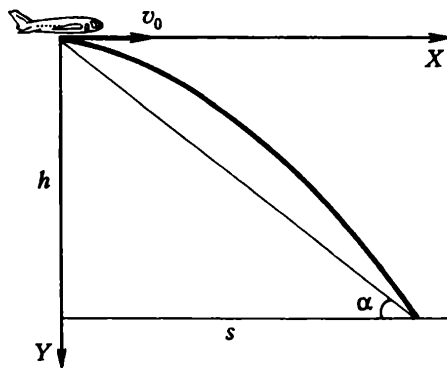


Рис. 3

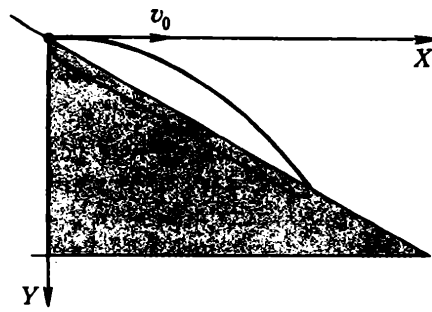


Рис. 4

$$s = v_0 t_1,$$

$$h = \frac{gt_1^2}{2}.$$

Исключая t_1 , получим

$$s = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{s} = \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

И еще одна задача.

Задача 6. Камень бросают горизонтально со скоростью v_0 с горы, уклон которой равен α . На каком расстоянии L от места бросания камень упадет на землю?

В системе координат, показанной на рисунке 4, положение камня в момент времени t определяется координатами

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

В момент t_1 падения на землю $x = L \cos \alpha$, а $y = L \sin \alpha$, т. е.

$$L \cos \alpha = v_0 t_1,$$

$$L \sin \alpha = \frac{gt_1^2}{2}.$$

Отсюда

$$L = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \alpha}.$$

Можно было бы выбрать и другую систему координат, например показанную на рисунке 5. Иногда это бывает удобно. В этой системе

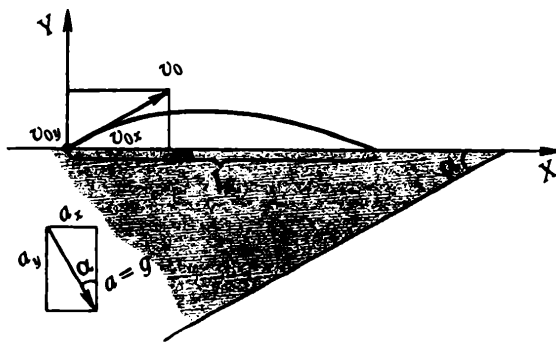


Рис. 5

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha,$$

$$a_x = g \sin \alpha, \quad a_y = -g \cos \alpha.$$

Поэтому

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t + \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2},$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2}.$$

Подставляя в эти уравнения значения x и y при $t=t_1$ ($x=L$, $y=0$) и решая их совместно, найдем ответ.

Упражнения

1. Камень свободно падает с высоты h . За какое время он проходит последний метр своего пути?

2. Камень, брошенный вертикально вверх, на высоте h побывал дважды с интервалом времени τ . С какой начальной скоростью он был брошен?

3. Цель, находящаяся на вершине холма, видна под углом α к горизонту с того места, где находится орудие. Какой должна быть начальная скорость снаряда, чтобы попадание было точным, если ствол орудия наклонен к горизонту под углом β , а высота холма равна h ?

4. Камень роняют в реку. Какой будет картина волн?

5. Два автомобиля одновременно прошли перекресток и едут по улицам, составляющим угол α друг с другом. Скорости автомобилей равны v_1 и v_2 . Через какое время расстояние между автомобилями будет равно l ? *Указание.* Удобно выбрать систему координат, связанную с одним из автомобилей.

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В. Грушин, А. Диденко, Г. Дубровский

Основу динамики материальной точки составляют три закона Ньютона. Они позволяют выбрать наиболее удобную для описания движения систему отсчета, связывают ускорение тела с действующими на это тело силами и устанавливают некоторые важные закономерности взаимодействия тел. Напомним эти законы.

Первый закон Ньютона: существуют такие системы отсчета, относительно которых движущиеся тела сохраняют свою скорость постоянной, если на них не действуют другие тела или действия других тел компенсируются. Эти системы отсчета называются инерциальными. Существуют и такие системы отсчета, в которых утверждение, высказанное в первом законе Ньютона, не выполняется. Подобные системы отсчета называются неинерциальными.

После того как сделан выбор какой-либо инерциальной системы отсчета, можно приступить к изучению и описанию взаимодействия тел и характера их движения.

Многочисленные эксперименты показали, что единственной причиной изменения скорости данного тела в инерциальных системах отсчета является взаимодействие его с другими телами (или с полем), т. е. действие на тело силы.

Второй закон Ньютона выражает связь между силой и ускорением — сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1)$$

Этот закон можно сформулировать и иначе — изменение импульса тела равно импульсу силы, действующей на тело:

$$\Delta(m\vec{v}) = \vec{F}\Delta t \quad (2)$$

(здесь $\Delta(m\vec{v})$ — изменение импульса тела за промежуток времени Δt).



Рис. 1

Третий закон Ньютона гласит, что тела действуют друг на друга с силами, направленными вдоль одной и той же прямой, равными по абсолютной величине и противоположными по направлению. Например, при столкновении двух тел (рис. 1) возникают две силы упругости, связанные соотношением

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

где \vec{F}_{12} — сила, действующая на первое тело со стороны второго, и \vec{F}_{21} — сила, с которой первое тело действует на второе. Силы всегда появляются парами.

Довольно часто абитуриенты дают неправильный ответ на вопрос: находятся ли тела системы, изображенной на рисунке 1, в равновесии? Причиной этого является, видимо, нечеткость чертежа: противоположно направленные силы кажутся приложенными к одной точке. Хотя на самом деле сила \vec{F}_{12} приложена к телу 1, а сила \vec{F}_{21} — к телу 2, так что на каждое тело действует лишь одна сила. Значит, ускорение каждого тела не равно нулю, и равновесия нет.

Решение задач по динамике нужно начинать с анализа сил, действующих на данное тело, причем необходимо четко представлять, действие какого другого тела характеризует каждая сила. Затем следует определить направление каждой силы, направления движения (скорости) и ускорения рассматриваемого тела.

Пусть, например, небольшое тело покоится на наклонной плоскости (рис. 2). Сколько сил действуют на него? Тело взаимодействует с Землей — это действие характеризуется си-

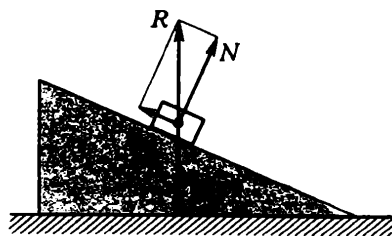


Рис. 2

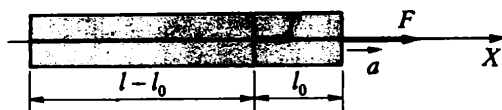


Рис. 3

лой тяжести mg , направленной по вертикали вниз, и с поверхностью наклонной плоскости — это действие характеризуется силой реакции \vec{R} . Так как тело находится в равновесии, векторная сумма сил должна быть равна нулю, поэтому сила \vec{R} по абсолютной величине равна mg , а направлена по вертикали вверх. Иногда действие опоры (и не только поверхности наклонной плоскости) на тело описывают двумя силами: силой упругости \vec{N} , направленной по нормали к поверхности (силой нормальной реакции), и силой трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вдоль поверхности. Векторная сумма этих сил равна силе реакции опоры (см. рис. 2):

$$\vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = \vec{R}.$$

Ключом к решению большинства задач динамики является второй закон Ньютона, который математически записывается в виде векторных уравнений (1) или (2). Однако в большинстве случаев оказывается более удобным записывать этот закон в проекциях на координатные оси. Например, векторное уравнение (1) в общем случае может быть заменено тремя скалярными, записанными в проекциях на три оси координат:

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z.$$

Заметим еще, что при анализе условия задачи необходимо ясно представлять смысл упрощающих предположений, содержащихся, как правило, в тексте задачи. Так, если рассматривается система тел, связанных нитью, то одним из таких дополнительных условий является обычно невесомость нити. Термин «невесомость» в этом случае не совсем корректен, точнее было бы сказать, что масса нити пренебрежимо мала. Что дает это упрощение? Оно позволяет считать, что натяжение нити во всех сечениях одинаково. Если бы нить обладала массой, то натяжение изменялось бы вдоль нити. Для примера разберем такую задачу.

Задача 1. Однородный стержень длиной l и массой m движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы \vec{F} , приложенной к торцу стержня и направленной вдоль оси стержня (рис. 3). Определите натяжение стержня в сечении, отстоящем от этого торца на l_0 .

Сила \vec{F} является единственной горизонтальной силой, действующей на стержень. Под действием этой силы стержень движется с ускорением \vec{a} , которое легко найти, используя второй закон Ньютона. Направим координатную ось X вдоль оси стержня в сторону движения стержня (см. рис. 3). В проекциях на эту ось второй закон Ньютона имеет вид

$$F_x = ma_x, \text{ или в данном случае } F = ma.$$

Мысленно отсечем от стержня переднюю часть длиной l_0 . Оставшаяся часть имеет длину $l - l_0$ и массу $m(l - l_0)/l$ (так как стержень однороден). Эта часть стержня движется с тем же ускорением \vec{a} , что и весь стержень, под действием искомой силы натяжения \vec{T} . Запишем для нее второй закон Ньютона в проекциях на ось X :

$$T = \frac{m(l - l_0)}{l} a = F \left(1 - \frac{l_0}{l}\right).$$

Анализ полученного выражения показывает, что натяжение стержня линейно убывает от максимального значения F до нуля с увеличением расстояния l_0 от нуля до l (рис. 4).

Таким образом, ясно, что если речь будет идти о нити или тросе, масса которых не является пренебрежимо малой, то необходимо учитывать изменение натяжения при переходе от одного сечения к другому.

Рассмотрим теперь несколько задач, в которых требуется определить максимальное или минимальное значения некоторых физических величин.

Задача 2. Груз массой m , подвешенный на нерастяжимой нити длиной l , отводят в сторону так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают (рис. 5). Определите максимальное натяжение нити при движении груза.

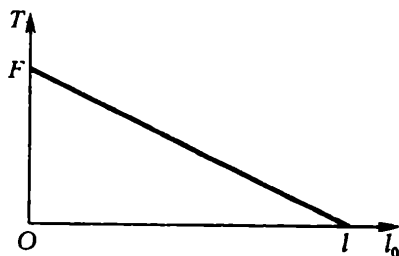


Рис. 4

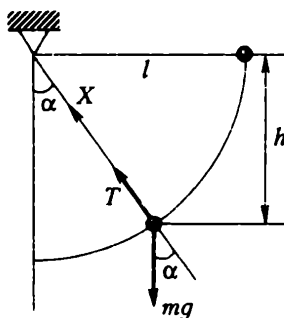


Рис. 5

Найдем зависимость абсолютной величины силы натяжения T нити от угла α , образуемого нитью с вертикалью. На груз, кроме силы натяжения, действует еще сила тяжести $m\vec{g}$, направленная под углом α к нити. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на неподвижную ось X , составляющую угол α с вертикалью в тот момент, когда нить совпадает с этой осью:

$$T - mg \cos \alpha = ma_x.$$

Так как нить нерастяжима, груз движется по окружности радиусом l и a_x представляет собой центростремительное ускорение:

$$a_x = \frac{v^2}{l}.$$

Здесь v — линейная скорость груза, которая тоже зависит от угла α . Однако ее нетрудно найти, исходя из закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgh,$$

где $h = l \cos \alpha$.

Учитывая все записанные соотношения, получаем

$$T = 3mg \cos \alpha.$$

Максимальное значение силы натяжения соответствует условию $\cos \alpha = 1$ и составляет величину

$$T_{\max} = 3mg.$$

Это значение силы натяжения достигается при $\alpha = 0$, т. е. в тот момент, когда нить вертикальна. Центростремительное ускорение груза при этом равно $2g$ и направлено вертикально вверх.

Задача 3. В условиях предыдущей задачи определите, какой угол с вертикалью образует нить в тот момент, когда проекция скорости груза на вертикальное направление наибольшая.

В начальный момент, когда груз находится в положении 1, его скорость равна нулю. Разумеется, равна нулю и проекция скорости на вертикальную ось Y (рис. 6). В положении 2 вертикальная проекция скорости опять равна нулю, так как скорость направлена горизонтально. Значит, при движении груза из положения 1 в положение 2 эта проекция сначала увеличивается, потом уменьшается, и где-то она макси-

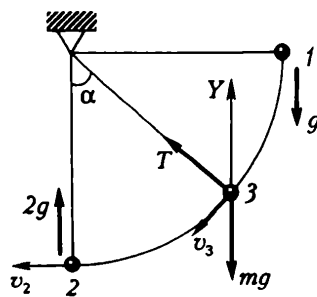


Рис. 6

мальна. Найдем условие максимума вертикальной проекции скорости груза.

При движении груза его ускорение тоже непрерывно изменяется: в положении 1 оно равно g и направлено вертикально вниз, а в положении 2 ускорение по абсолютной величине равно $2g$ и направлено вертикально вверх. Следовательно, в какой-то момент (в точке 3 на рисунке 6) вертикальная проекция ускорения обращается в ноль, а вертикальная проекция скорости принимает максимальное значение. Это и есть условие, которое позволяет найти ответ на вопрос задачи.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось Y для момента, когда тело находится в точке 3:

$$T \cos \alpha - mg = 0,$$

где α — угол между нитью и вертикалью. Из решения предыдущей задачи

$$T = 3mg \cos \alpha.$$

Тогда получаем

$$3mg \cos^2 \alpha - mg = 0,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } \alpha \approx 54^\circ.$$

Можно получить ответ более коротким путем. Как известно, в точках экстремума функции ее производная обращается в ноль. Вертикальная проекция скорости в произвольном положении груза определяется соотношением

$$v_y = v \sin \alpha = \sqrt{2gl \cos \alpha} \sin \alpha.$$

Найдем производную по α и приравняем ее к нулю:

$$\sqrt{\frac{gl}{2 \cos \alpha}} (3 \cos^2 \alpha - 1) = 0.$$

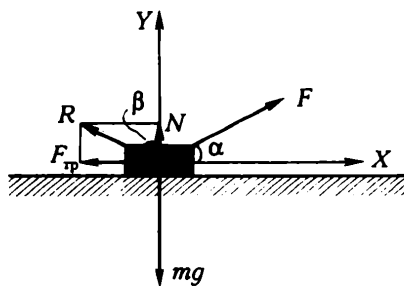


Рис. 7

Условие $3 \cos^2 \alpha - 1 = 0$ совпадает с условием максимума, найденным выше.

Задача 4. Тело массой m движется равномерно по горизонтальной поверхности под действием силы \vec{F} (рис. 7). Коэффициент трения равен μ . При каком значении угла α сила \vec{F} имеет наименьшую абсолютную величину?

На тело действуют четыре силы: сила \vec{F} , сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции поверхности \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Под действием этих сил тело движется равномерно и прямолинейно.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$F \cos \alpha - F_{\text{тр}} = 0,$$

$$N + F \sin \alpha - mg = 0.$$

Кроме того,

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Из этих трех уравнений находим

$$F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Мы видим, что абсолютная величина силы \vec{F} является функцией угла α . Чтобы найти экстремум этой функции, вычислим ее производную и приравняем к нулю:

$$\frac{-\mu mg(-\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2} = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu, \text{ и } \alpha = \operatorname{arctg} \mu.$$

Задачу можно решить и другим способом. Заменяем действия сил \vec{N} и $\vec{F}_{\text{тр}}$ действием одной силы — силы реакции опоры \vec{R} (см. рис. 7). Так как тело движется равномерно, вектор-

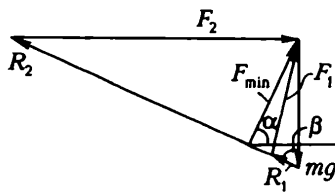


Рис. 8

ная сумма всех сил равна нулю, т. е. силы $m\vec{g}$, \vec{R} и \vec{F} образуют замкнутый треугольник. Одной из его сторон является сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Другая сторона треугольника — реакция опоры \vec{R} . Величина этой силы зависит от направления силы \vec{F} , но направление ее неизменно и определяется лишь величиной коэффициента трения (см. рис. 7):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \mu.$$

Сила \vec{F} , вообще говоря, может быть направлена под любым углом α к горизонту. Но тело движется равномерно, и треугольник сил должен быть замкнут. Это достигается тем, что одновременно с изменением направления силы \vec{F} изменяется ее величина и величина силы \vec{R} . На рисунке 8 изображены два треугольника, определяемые соотношениями

$$m\vec{g} + \vec{R}_1 + \vec{F}_1 = 0$$

и

$$m\vec{g} + \vec{R}_2 + \vec{F}_2 = 0.$$

Из этого рисунка видно, что сила \vec{F} будет минимальной по абсолютной величине в том случае, если она перпендикулярна к линии действия силы \vec{R} . Очевидно, что при этом угол ее наклона к горизонту

$$\alpha = \beta = \operatorname{arctg} \mu.$$

Упражнения

1. Барон Мюнхгаузен при полете на Луну использовал пушку с длиной ствола $L = 600$ м. Чтобы отправить снаряд в межпланетное пространство, ему нужно было сообщить скорость $v = 12$ км/с. Определите, с какой силой давил на дно снаряда барон Мюнхгаузен, находящийся внутри снаряда, если его масса $m = 80$ кг. Считайте, что снаряд в стволе пушки двигался равноускоренно в направлении по вертикали вверх.

2. Два тела массами m_1 и m_2 , связанные нерастяжимой нитью пренебрежимо малой массы, движутся под действием силы \vec{F} по

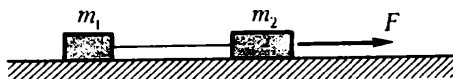


Рис. 9

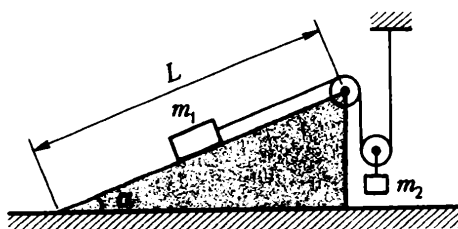


Рис. 10

горизонтальной поверхности (рис. 9). Коэффициент трения грузов о поверхность μ . Во сколько раз изменится натяжение нити, если коэффициент трения уменьшится в два раза?

3. Пожарный держит шланг под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Расход воды из шланга $Q = 50$ кг/с. Скорость вытекающей воды $v = 20$ м/с. На сколько при этом увеличивается сила давления пожарного на пол?

4. На рисунке 10 изображена система двух тел массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг, соединенных нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный и подвижный блоки. В начальный момент первое тело находится посередине наклонной плоскости длиной $L = 3$ м, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Через какое время это тело достигнет края наклонной плоскости, если коэффициент трения о плоскость $\mu = 0,25$? Трением в блоках, а также массой блоков и нити пренебречь.

СИЛЫ ТРЕНИЯ И ДВИЖЕНИЕ

Л. Асламазов

Как известно, движению тела часто препятствуют силы трения.

Если соприкасаются поверхности твердых тел, их относительному движению мешают силы сухого трения. Характерной особенностью сухого трения является существование зоны застоя. Тело нельзя сдвинуть с места, пока абсолютная величина внешней силы не превысит определенного значения. До этого момента между поверхностями соприкасающихся тел действует сила трения покоя, которая уравнивает внешнюю силу и растет вместе с ней (рис. 1). Максимальное значение силы трения покоя определяется формулой

$$F_{\text{тр max}} = \mu N,$$

где μ — коэффициент трения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей, N — сила нормального давления.

Когда абсолютная величина внешней силы превышает значение $F_{\text{тр max}}$, возникает относительное движение — проскальзывание. Сила трения скольжения обычно слабо зависит от скорости относительного движения, и при малых скоростях ее можно считать равной $F_{\text{тр max}}$.

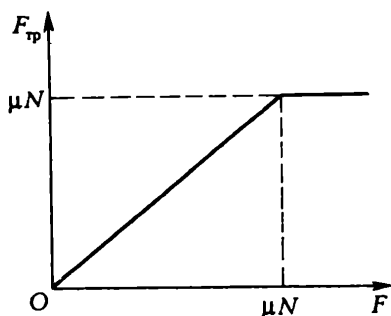


Рис. 1

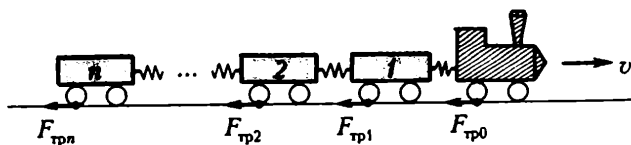


Рис. 2

Движению тела в жидкости и газе препятствуют силы жидкого трения. Главное отличие жидкого трения от сухого — отсутствие зоны застоя. В жидкости или газе не возникают силы трения покоя, и поэтому даже малая внешняя сила способна вызвать движение тела. Обычно сила жидкого трения при малых скоростях пропорциональна скорости, а при больших — квадрату скорости движения.

Обсудим несколько конкретных задач.

Задача 1. При экстренной остановке поезда, двигавшегося со скоростью $v=70$ км/ч, тормозной путь составил $s=100$ м. Чему равен коэффициент трения между колесами поезда и рельсами? Каким станет тормозной путь, если откажут тормоза в одном из $n=10$ вагонов? Массу локомотива принять равной массе вагона, силами сопротивления воздуха пренебречь.

При торможении ускорение \bar{a} поезду сообщает сила трения $\bar{F}_{тр}$:

$$M\bar{a} = \bar{F}_{тр},$$

где M — масса всего состава. Сила трения представляет собой равнодействующую всех сил трения, действующих на состав (рис. 2), и равна по модулю $F_{тр} = \mu N = \mu Mg$. Следовательно,

$$a = \frac{F_{тр}}{M} = \mu g.$$

С другой стороны,

$$a = \frac{v^2}{2s}.$$

Отсюда получаем

$$\mu = \frac{v^2}{2gs} \approx 0,2.$$

В том случае когда не работают тормоза у одного из вагонов, суммарная сила трения, действующая на вагоны и локомотив, равна

$$F_{тр}^* = \mu nmg,$$

где m — масса одного вагона. Масса всего состава $M = (n+1)m$,

так что $m = M/(n+1)$. Ускорение поезда в этом случае составляет

$$a^* = \frac{F_{\text{тр}}^*}{M} = \frac{n}{n+1} \mu g,$$

а тормозной путь —

$$s^* = \frac{v^2}{2a^*} = \frac{n+1}{n} \frac{v^2}{2\mu g} = s \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 110 \text{ м.}$$

Важно понимать, что сила трения не всегда тормозит движение. Во многих случаях движение становится возможным именно благодаря ей. Смогли бы вы, например, разбежаться на скользком льду? Очевидно, нет — в лучшем случае вам удалось бы бежать на месте. Сила трения между подошвами и землей, препятствуя проскальзыванию, создает необходимое для разгона ускорение.

Задача 2. При каком коэффициенте трения человек сможет вбежать на горку высотой $h=10$ м с углом наклона $\alpha=0,1$ рад за время $t=10$ с без предварительного разгона? Считайте, что мощность человека не ограничивает время движения, а сопротивление воздуха мало.

Сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, действующая на человека, препятствует проскальзыванию и поэтому направлена вверх (рис. 3). На человека также действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{R} . Величина последней силы определяется из условия равенства нулю суммы проекций всех сил на направление, перпендикулярное плоскости горки (в этом направлении нет ускорения):

$$R = mg \cos \alpha.$$

Как видно, сила реакции R , а значит, и равная ей по модулю сила нормального давления N , меньше силы тяжести. Для силы трения получаем

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha.$$

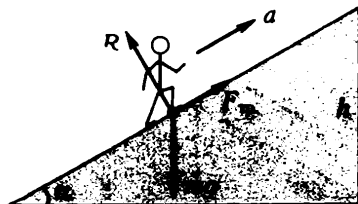


Рис. 3

Напишем теперь второй закон Ньютона, спроектировав все силы на направление вдоль плоскости горки:

$$ma = \mu mg \cos \alpha - mg \sin \alpha.$$

С другой стороны, ускорение связано со временем движения и пройденным путем кинематической формулой

$$l = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{at^2}{2}.$$

Из последних двух уравнений для коэффициента трения получаем

$$\mu = \frac{2h}{gt^2 \sin \alpha \cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \approx 0,3.$$

Если человек не вбегает на горку, а сбегает с нее, то сила трения, препятствуя скольжению, может тормозить его движение. Благодаря этому, человеку удастся медленно спускаться с горки.

Задача 3. Какую минимальную скорость будет иметь человек, сбегавший с горки высотой $h=10$ м с наклоном $\alpha=0,1$ рад при коэффициенте трения $\mu=0,05$?

Проектируя силы, действующие на человека, на направление плоскости горки (рис. 4), для модуля ускорения получаем

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha.$$

Конечная скорость человека равна

$$v = \sqrt{2al} = \sqrt{2gh(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)} \approx 10 \text{ м/с}.$$

При $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$ человек может стоять на горке и, следовательно, может спускаться с нее как угодно медленно.

Разумеется, все сказанное относится не только к человеку, но и к автомашине. Сила трения между шинами и шоссе, препятствуя проскальзыванию, разгоняет автомобиль, когда колеса соединены с двигателем. Эта же сила, также препят-

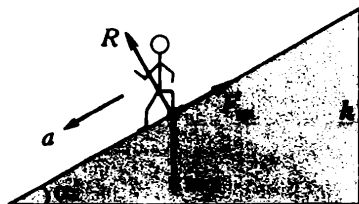


Рис. 4

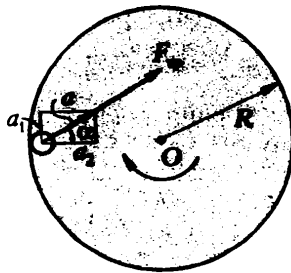


Рис. 5

ствуя проскальзыванию, тормозит движение автомобиля, когда к колесам прижаты тормозные колодки.

Рассмотрим теперь роль силы трения при движении тела по окружности.

Задача 4. У края диска радиусом R лежит монета (рис. 5). Диск раскручивается так, что его угловая скорость линейно растет со временем: $\omega = \varepsilon t$. В какой момент времени монета слетит с диска, если коэффициент трения между диском и монетой μ ? Какой угол с направлением к центру диска образует сила трения в этот момент?

До тех пор пока монета лежит на диске, ее линейная скорость v равна линейной скорости диска:

$$v = \omega R = \varepsilon R t.$$

Как видно, эта скорость не постоянна, а линейно растет со временем. Следовательно, монета движется с ускорением, проекция которого на направление касательной к окружности равна $a_1 = \varepsilon R$. Кроме того, поскольку монета движется по окружности, у нее есть и центростремительное ускорение (т. е. проекция ускорения на направление к центру окружности) $a_2 = v^2/R = \varepsilon^2 R t^2$. Таким образом, ускорение монеты равно (см. рис. 5)

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \varepsilon R \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}.$$

Единственной силой, действующей на монету в плоскости диска, является сила трения. По второму закону Ньютона, она и создает ускорение:

$$ma = F_{\text{тр}}.$$

Подставляя сюда выражение для a и для максимального значения силы трения: $F_{\text{тр}} = \mu mg$, получаем, что монета может лежать на диске до момента

$$t = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\mu^2 g^2}{\varepsilon^2 R^2} - 1 \right)^{1/4}.$$

При $\varepsilon > \mu g/R$ монета слетит сразу же, так как сила трения будет не в состоянии обеспечить столь большое ускорение монеты.

Направление силы трения совпадает с направлением ускорения монеты, поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\varepsilon R}{\varepsilon^2 R l^2} = \left(\frac{\mu^2 g^2}{\varepsilon^2 R^2} - 1 \right)^{-1/2}.$$

Многие задачи на силы трения удобно решать, используя закон сохранения энергии.

Задача 5. Тело, скользящее со скоростью v по гладкой поверхности, влетает на шероховатую поверхность с коэффициентом трения μ (рис. 6). При какой минимальной длине тела l оно остановится так, что часть его еще будет находиться на гладкой поверхности?

Из закона сохранения энергии следует, что начальная кинетическая энергия тела равна работе, совершаемой против сил трения:

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{тр.}}$$

При нахождении работы необходимо учесть, что сила трения меняется по мере перемещения тела с гладкой поверхности на шероховатую. Если на шероховатой поверхности находится часть тела длиной x , то

$$F_{\text{тр}} = \frac{\mu mg}{l} x,$$

т. е. сила трения пропорциональна пройденному пути. Поэтому при перемещении всего тела работа равна

$$A_{\text{тр}} = \int_0^l F_{\text{тр}} dx = \frac{\mu mg}{l} \int_0^l x dx = \frac{\mu mgl}{2}.$$

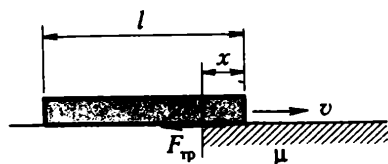


Рис. 6

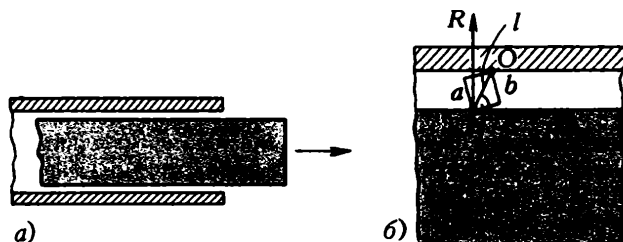


Рис. 7

Подставляя это выражение в уравнение, выражающее закон сохранения энергии, для минимальной длины тела получаем

$$l = \frac{v^2}{\mu g}.$$

В заключение рассмотрим довольно часто встречающееся явление — заклинивание: в некоторых случаях невозможно преодолеть силу трения, даже прикладывая очень большую внешнюю силу.

Задача 6. Стержень вытаскивают из трубы, имеющей диаметр, несколько больший диаметра стержня (рис. 7, а). В зазор между стержнем и трубой попадает песчинка, имеющая форму параллелепипеда (отношение $a/b=0,1$). Оцените, при каком значении коэффициента трения между песчинкой и поверхностями стержня и трубы стержень не удастся вытащить из трубы. Считайте, что коэффициент трения между трубой и стержнем пренебрежимо мал.

При движении стержня между ним и песчинкой возникает сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Эта сила, действуя на песчинку, создает момент, вращающий ее вокруг точки O (рис. 7, б). Если этот момент больше момента силы реакции \vec{R} , вращающего песчинку в обратную сторону, вытащить стержень не удастся, так как песчинка будет вдавливаться в стержень. Стержень заклинит, когда

$$F_{\text{тр}} l \sin \alpha = R l \cos \alpha,$$

$$F_{\text{тр}} \leq \mu N.$$

Учитывая, что сила реакции равна по модулю силе нормального давления: $R=N$, получаем, что при $\mu > \operatorname{ctg} \alpha$ стержень вытащить не удастся. В нашем случае $\operatorname{ctg} \alpha \approx a/b=0,1$, так что при $\mu > 0,1$ силу трения не удастся преодолеть даже очень большой внешней силой.

Упражнения

1. На наклонной плоскости лежит тело массой m . Коэффициент трения между телом и плоскостью μ . Найдите модуль силы трения, действующей на тело, в зависимости от угла наклона плоскости α .

2. На листе бумаги лежит монета массой m . С каким максимальным ускорением можно тянуть лист бумаги, чтобы монета с него не соскользнула, если коэффициент трения монеты о бумагу μ ? Как при этом направлена сила трения, действующая на монету?

3. Нажимая на педаль «газ», водитель увеличивает мощность, развиваемую двигателем автомобиля. При какой мощности начнется пробуксовка колес автомобиля, если коэффициент трения между шинами и дорогой $\mu=0,2$, масса автомобиля $m=1000$ кг, скорость $v=60$ км/ч, КПД двигателя $\eta=40\%$?

4. Водитель автомобиля внезапно увидел перед собой стену, преграждающую дорогу. Что выгоднее ему сделать: затормозить или свернуть в сторону?

КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

А. Шеронов

Движение тел по криволинейным траекториям часто встречается в природе и технике. Это, например, движение спутников и метеоритов в поле тяжести Земли или планет и комет в поле тяжести Солнца, движение заряженных частиц в ускорителях или некоторых деталей в различных механизмах.

Напомним основные закономерности, справедливые для криволинейного движения. Как известно, скорость тела всегда направлена по касательной к траектории и при движении может изменяться и по модулю, и по направлению. В общем случае вектор ускорения тела не совпадает по направлению со скоростью, а составляет с ней некоторый угол. Часто бывает удобнее говорить не о самом ускорении, а о двух его проекциях. Одна из них, так называемая тангенциальная (или касательная) проекция a_t , — это проекция на направление скорости (т. е. на направление касательной к траектории). Эта проекция характеризует изменение модуля скорости. Другая, так называемая нормальная (или центростремительная) проекция a_n , — это проекция на направление, перпендикулярное к вектору скорости. Она характеризует изменение направления скорости. В частности, при равномерном движении тела по окружности ускорение имеет лишь одну проекцию — нормальную к скорости и изменяющую лишь ее направление. Модуль этой проекции равен квадрату модуля скорости, деленному на радиус окружности: $a_n = v^2/R$.

Небольшой участок любой криволинейной траектории всегда можно представить как часть некоторой окружности, радиус соответствующей окружности называют радиусом кривизны траектории в данном месте. Поэтому выражение $a_n = v^2/R$ можно использовать для определения радиуса кривизны траектории R .

Наконец, для тела, движущегося по криволинейной траектории, так же как и для тела, движущегося прямолинейно, справедлив второй закон Ньютона: векторная сумма всех

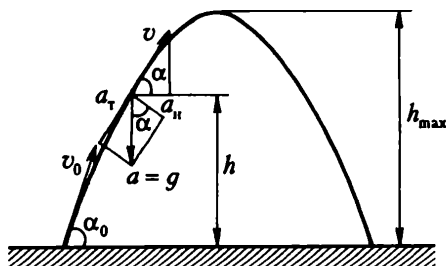


Рис. 1

действующих на тело сил равна массе тела, умноженной на вектор его ускорения.

Рассмотрим несколько конкретных задач на криволинейное движение тела.

Задача 1. С земли брошено тело с начальной скоростью v_0 под углом α_0 к горизонту. Найдите зависимость тангенциальной и нормальной проекций ускорения тела от высоты его подъема. Сопротивление воздуха не учитывать.

После броска на тело действует только одна сила — сила притяжения к Земле, поэтому в любой точке траектории ускорение тела \vec{a} равно ускорению свободного падения \vec{g} (рис. 1). Тангенциальная и нормальная проекции ускорения равны, соответственно

$$a_\tau = g \sin \alpha \text{ и } a_n = g \cos \alpha.$$

Здесь α — угол, который составляет с горизонтом скорость \vec{v} тела на высоте h .

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

и найдем выражение для модуля v скорости тела:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Во время движения проекция скорости на горизонтальное направление остается постоянной и равной $v_0 \cos \alpha_0$. Тогда (см. рис. 1)

$$a_n = g \cos \alpha = \frac{gv_0 \cos \alpha_0}{v} = \frac{gv_0 \cos \alpha_0}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}},$$

$$a_\tau = g \sin \alpha = g \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = g \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0 - 2gh}{v_0^2 - 2gh}}.$$

В полученные формулы можно ввести максимальную высоту подъема тела $h_{\max} = (v_0^2 \sin^2 \alpha_0) / (2g)$:

$$a_n = g \cos \alpha_0 \cdot \sqrt{\frac{h_{\max}}{h_{\max} - h \sin^2 \alpha_0}},$$

$$a_\tau = g \sin \alpha_0 \cdot \sqrt{\frac{h_{\max} - h}{h_{\max} - h \sin^2 \alpha_0}}.$$

Задача 2. Конечный участок ВС горы разгона на лыжном трамплине представляет собой дугу окружности радиусом $R = 15$ м (рис. 2). Полная высота горы $H = 50$ м. Найдите модуль ускорения лыжника в точке С, если угол $\alpha = 30^\circ$. Считайте, что лыжник спускается с горы без начальной скорости. Трением пренебречь.

При движении по горе разгона на лыжника действуют две силы. Это — сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила реакции опоры \vec{N} , направленная, в отсутствие трения, по радиусу кривизны траектории, в нашем случае — по радиусу CO . Равнодействующая этих сил и сообщает лыжнику искомое ускорение \vec{a} :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

По теореме косинусов для треугольника сил имеем (см. рис. 2).

$$(ma)^2 = (mg)^2 + N^2 - 2mgN \cos \alpha.$$

Пусть \vec{v} — скорость лыжника в точке С. Нормальная проекция ускорения $a_n = v^2/R$ создается соответствующими проекциями сил $m\vec{g}$ и \vec{N} :

$$\frac{mv^2}{R} = N - mg \cos \alpha.$$

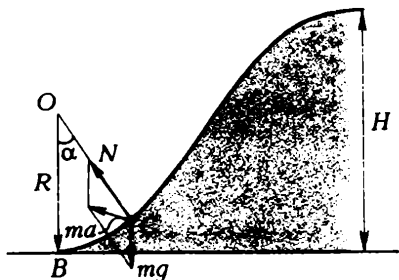


Рис. 2

Исключая N из последних двух уравнений, получим

$$a^2 = g^2 \sin^2 \alpha + \left(\frac{v^2}{R} \right)^2.$$

Подставим сюда значение модуля v скорости лыжника из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mg(H - R(1 - \cos \alpha))$$

и найдем модуль ускорения лыжника:

$$a = g \sqrt{\sin^2 \alpha + 4 \left(\frac{H}{R} - 1 + \cos \alpha \right)^2} \approx 64 \text{ м/с}^2.$$

Это же значение можно получить из несколько других рассуждений. При движении по дуге окружности нормальная проекция ускорения равна $a_n = v^2/R$, а тангенциальная проекция, создаваемая только соответствующей проекцией силы тяжести, равна $a_\tau = g \sin \alpha$. Тогда модуль ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{g^2 \sin^2 \alpha + \left(\frac{v^2}{R} \right)^2}.$$

Задача 3. Небольшое тело, находящееся на полусфере радиусом R , начинает скользить по ней без трения (рис. 3). Определите координаты точки, в которой тело достигнет горизонтальной плоскости.

Некоторое время после начала движения тело будет скользить по полусфере, а потом, оторвавшись от нее, будет двигаться как тело, брошенное под углом к горизонту.

Введем систему координат XOY , как показано на рисунке 3. Сначала найдем координаты x_0 и y_0 точки отрыва тела от полусферы, а также модуль и направление скорости \vec{v}_0 в момент отрыва.

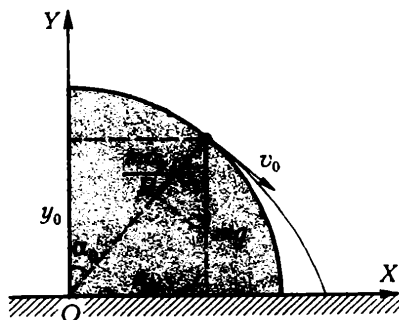


Рис. 3

Движение тела по полусфере происходит под действием двух сил — силы тяжести $m\vec{g}$ и силы нормальной (так как отсутствует трение) реакции \vec{N} . В момент отрыва сила реакции обращается в ноль, так что нормальное ускорение $a_n = v_0^2/R$ телу сообщается только соответствующей проекцией силы тяжести:

$$\frac{mv_0^2}{R} = mg \cos \alpha_0.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением, выражающим закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha_0),$$

найдем

$$\cos \alpha_0 = \frac{2}{3}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2gR}{3}}.$$

Координаты точки отрыва равны, соответственно,

$$y_0 = R \cos \alpha_0 = \frac{2R}{3},$$

$$x_0 = \sqrt{R^2 - y_0^2} = \frac{\sqrt{5}R}{3}.$$

Теперь запишем уравнения движения тела после отрыва от полусферы:

$$x = x_0 + v_0 \cos \alpha_0 \cdot t,$$

$$y = y_0 - v_0 \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Очевидно, что в момент достижения горизонтальной плоскости вертикальная координата тела становится равной нулю:

$$y = 0.$$

Координату x найдем из соответствующего уравнения движения, подставив туда значения начальных условий (x_0, v_0, α_0) , а также время полета до удара, полученное из условия $y = 0$:

$$x = 1,1R.$$

Задача 4. По горизонтальной поверхности с постоянной скоростью v_0 катится без проскальзывания колесо радиусом R . На ободу колеса находится материальная точка массой m .

Определите модуль и направление силы реакции, действующей на точку, а также радиус кривизны ее траектории в зависимости от положения точки на ободе.

Пусть мгновенное положение материальной точки на ободе колеса характеризуется углом α (рис. 4). С точки зрения наблюдателя в неподвижной системе координат (например, связанной с землей), точка участвует в двух движениях — в поступательном движении вместе с колесом с постоянной горизонтальной скоростью v_0 и во вращательном движении вокруг центра колеса с угловой скоростью v_0/R .

Воспользуемся тем, что в одинаковых инерциальных системах отсчета ускорения тела одинаковы. Рассмотрим систему координат, движущуюся вместе с центром колеса со скоростью v_0 . В этой системе материальная точка равномерно движется по окружности. Нормальное ускорение \vec{a}_n ($a_n = v_0^2/R$) ей сообщают две силы — сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} . По теореме косинусов из треугольника сил имеем (см. рис. 4)

$$N = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv_0^2}{R}\right)^2 - 2(mg)\left(\frac{mv_0^2}{R}\right)\cos \alpha}.$$

Направление силы \vec{N} , определяемое углом φ , можно найти из того же треугольника по теореме синусов:

$$\varphi = \arcsin \frac{mg \sin \alpha}{N}.$$

Найдем теперь радиус кривизны траектории точки. Как мы уже говорили, в неподвижной системе координат скорость точки \vec{v} складывается из скоростей ее поступательного и вращательного движений (см. рис. 4). По теореме косинусов квадрат модуля скорости равен

$$v^2 = v_0^2 + v_0^2 - 2v_0^2 \cos (180^\circ - \alpha) = 2v_0^2(1 + \cos \alpha).$$

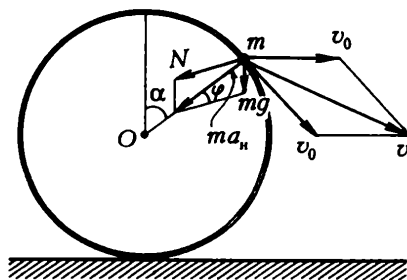


Рис. 4

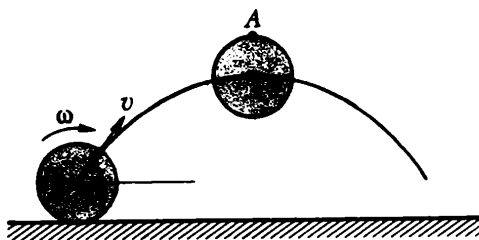


Рис. 5

Проекция ускорения точки на направление, перпендикулярное к скорости, равна

$$a_{\perp} = \frac{v_0^2}{R} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда радиус кривизны траектории точки равен

$$r = \frac{v^2}{a_{\perp}} = 4R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Упражнения

1. Небольшое тело соскальзывает без трения с поверхности полушеры (см. задачу 3). Определите направление, под которым тело отскочит от горизонтальной плоскости, и максимальную высоту его подъема после отскока. Удар тела о плоскость считайте абсолютно упругим.

2. Диск радиусом R , закрученный около своей оси с угловой скоростью ω , бросают со скоростью v под углом α к горизонту (рис. 5). Определите радиус кривизны траектории точки A диска в момент его максимального подъема. Плоскость диска все время остается вертикальной.

3. Автомобиль массой $m = 10^3$ кг начинает двигаться с постоянной тангенциальной проекцией ускорения $a_t = 1 \text{ м/с}^2$ по шоссе в виде дуги окружности радиусом $R = 100$ м. Какую максимальную скорость он наберет до начала проскальзывания колес по асфальту, если коэффициент трения скольжения $\mu = 0,3$? Какую мощность должен развить к этому моменту двигатель автомобиля?

СТАТИКА

Л. Асламазов

Какие условия накладываются на силы, приложенные к телу, если тело находится в покое? Ответ на этот вопрос дает статика.

Прежде всего ясно, что сумма всех сил (разумеется, векторная) должна быть равна нулю. В противном случае — по второму закону Ньютона — тело обязательно двигалось бы с ускорением. Но одного этого условия недостаточно. Если, например, приложить к телу две силы, равные по величине, но противоположно направленные (и такие, чтобы линии их действия не совпадали), то, очевидно, векторная сумма сил равна нулю, но тело не будет находиться в покое — оно будет вращаться (рис. 1).

Вторым условием, которому должны удовлетворять силы, является равенство нулю суммы их моментов относительно какой-либо точки. Напомним, что моментом силы \vec{F} относительно точки O (рис. 2) называется произведение Fh , где h — расстояние от точки O до линии действия силы (плечо силы). Момент положителен, если сила стремится вращать тело против часовой стрелки, и отрицателен в противоположном случае. Точку O можно выбирать произвольно. В самом деле, если сумма всех сил, приложенных к телу, равна нулю и сумма моментов всех сил относительно какой-либо точки равна нулю, то сумма моментов относительно любой другой точки также равна нулю. Рассмотрим, например, момент относительно точки O_1 :

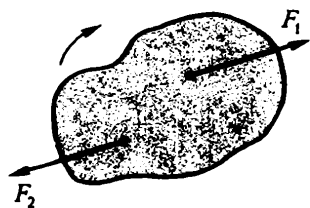


Рис. 1

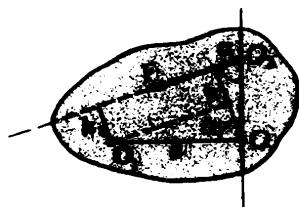


Рис. 2

$$Fh_1 = F(h - a \cos \alpha) = Fh - aF \cos \alpha.$$

Величина $F \cos \alpha$ — это проекция силы на направление OO_2 . Так как векторная сумма всех сил, по условию равна нулю, то и сумма их проекций на любое направление тоже равна нулю. Поэтому

$$\Sigma Fh_1 = \Sigma Fh - a \Sigma F \cos \alpha = 0.$$

Итак, для того чтобы тело находилось в покое, должны быть равны нулю векторная сумма всех сил и алгебраическая сумма (т. е. сумма с учетом знаков) моментов всех сил относительно произвольной точки.

Казалось бы (поскольку направление, на которое мы проектируем силы, и точка, относительно которой мы считаем моменты, могут быть произвольными), выбирая различные направления и различные точки, можно получать сколько угодно уравнений для нахождения сил, приложенных к телу. Однако это не так. Часть полученных уравнений окажется следствием других. Для случая, когда все силы лежат в одной плоскости, можно записать всего три уравнения. Какими именно условиями равновесия удобнее пользоваться, зависит от конкретной задачи.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1. Труба массой m лежит на земле. Какое минимальное вертикальное усилие надо приложить для того, чтобы приподнять ее за один из концов (рис. 3)?

Задача решается в одну строчку, если воспользоваться уравнением моментов относительно точки O :

$$mg \frac{l}{2} - Fl = 0,$$

где l — длина трубы, откуда

$$F = \frac{mg}{2}.$$

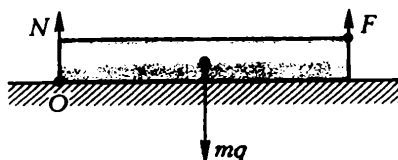


Рис. 3

Правильный выбор точки позволил сразу же исключить из рассмотрения неизвестную силу N , которая нас в этом случае не интересовала.

Задача 2. К вертикальной гладкой стене в точке A на веревке длиной l подвешен шар массой m (рис. 4). Чему равны сила натяжения веревки и сила давления шара на стенку, если радиус шара R ?

Воспользуемся уравнением моментов относительно центра шара O . Моменты сил тяжести $m\vec{g}$ и силы реакции \vec{N} относительно точки O равны нулю. Следовательно, линия действия силы натяжения \vec{T} также проходит через центр шара.

В качестве двух других условий можно взять, например, равенство нулю проекций всех сил на горизонтальное и вертикальное направления:

$$T \cos \alpha = mg, \quad T \sin \alpha = N.$$

Из чертежа находим, что

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}}{l+R}, \quad \sin \alpha = \frac{R}{l+R}.$$

Таким образом,

$$T = \frac{mg(l+R)}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}}, \quad N = \frac{mgR}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}}.$$

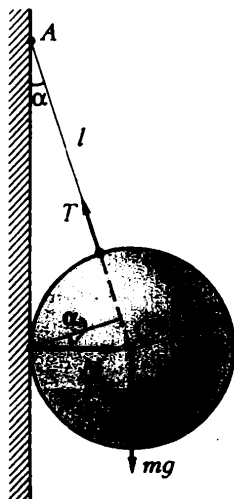
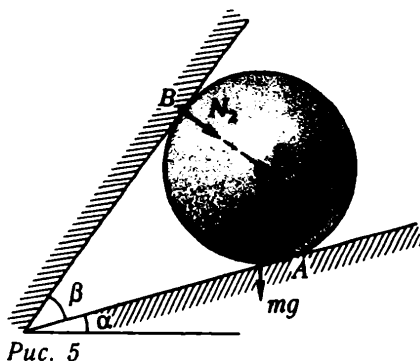


Рис. 4



Задача 3. Шар массой m опирается на две гладкие плоскости, образующие двугранный угол. Нижняя плоскость наклонена к горизонту под углом α , а верхняя — под углом β к нижней (рис. 5). Определите силы, с которыми шар давит на плоскости.

Запишем уравнение моментов относительно точки A :

$$mgR \sin \alpha - N_2 R \sin \beta = 0.$$

Отсюда

$$N_2 = \frac{mg \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Сила N_1 так же легко находится из уравнения моментов относительно точки B :

$$N_1 R \sin \beta - mgR \sin (\beta + \alpha) = 0,$$

или

$$N_1 = \frac{mg \sin (\beta + \alpha)}{\sin \beta}.$$

Во многих случаях равновесие становится возможным только благодаря силам трения, которые уравнивают приложенные силы. При этом важно понимать, что сила трения покоя не всегда равна μN (μ — коэффициент трения, N — сила нормального давления). Это выражение дает только максимально возможное значение силы трения. Так, например, сила трения, действующая на тело, покоящееся на наклонной плоскости с углом наклона α , просто равна составляющей силы тяжести, параллельной наклонной плоскости:

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha.$$

Она становится равной

$$\mu N = \mu mg \cos \alpha$$

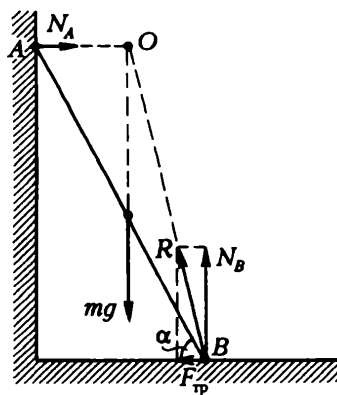


Рис. 6

только в момент начала движения при $\alpha = \text{arctg } \mu$. На тело, свободно лежащее на горизонтальной плоскости ($\alpha = 0$), сила трения вообще не действует.

Вот — примеры.

Задача 4. К совершенно гладкой вертикальной стенке прикреплена лестница массой m , наклоненная под углом α к горизонту. Как направлены и чему равны силы, действующие на лестницу со стороны стенки и пола?

Спроектируем все силы, действующие на лестницу, на горизонтальное и вертикальное направления и воспользуемся уравнением моментов относительно точки B (рис. 6):

$$mg \frac{l}{2} \cos \alpha - N_A l \sin \alpha = 0,$$

где l — длина лестницы. Из этого уравнения находим давление на стенку:

$$N_A = \frac{mg}{2} \text{ctg } \alpha.$$

Сила трения, действующая на лестницу со стороны пола, равна $F_{\text{тр}} = N_A$, а давление на пол равно $N_B = mg$. Следовательно, сила реакции пола равна

$$R = \sqrt{N_B^2 + F_{\text{тр}}^2} = \frac{mg}{2} \sqrt{4 + \text{ctg}^2 \alpha}$$

и наклонена к горизонту под углом

$$\beta = \text{arctg } \frac{N_B}{F_{\text{тр}}} = \text{arctg } (2 \text{tg } \alpha).$$

Линию действия силы \vec{R} можно получить и построением: она должна проходить через точку O пересечения линий действия сил \vec{N}_A и $m\vec{g}$, так как сумма моментов всех сил относительно этой точки также равна нулю.

Таким образом, мы получили, что для достижения равновесия сила трения должна равняться $(mg/2)\operatorname{ctg} \alpha$. Это возможно, если коэффициент трения $\mu > F_{\text{тр}}/N_B = (\operatorname{ctg} \alpha)/2$. При $\mu = (\operatorname{ctg} \alpha)/2$ сила трения равна максимально возможному значению μN_B , при больших μ для достижения равновесия достаточно некоторой части максимально возможной силы трения.

Заметим, что нужное для равновесия значение μ зависит от угла α : при $\alpha \rightarrow 0$ (лестница почти горизонтальна) нужен большой коэффициент трения, а при $\alpha \rightarrow \pi/2$ коэффициент трения может быть достаточно малым.

Задача 5. *Какой минимальной горизонтальной силой можно опрокинуть через ребро кубик, лежащий на горизонтальном полу?*

Обычно при решении такой задачи исходят из того, что при опрокидывании момент приложенной силы \vec{F} относительно оси вращения O (рис. 7) уравнивает момент силы тяжести $m\vec{g}$. Это, конечно, правильно. Но почему мы при этом не учитываем момента силы давления со стороны пола? На этот вопрос часто отвечают неверно. Дело в том, что сила \vec{N} не всегда проходит через центр кубика. Когда мы прикладываем к кубiku силу \vec{F} , линия действия силы \vec{N} (равнодействующей сил давления пола на кубик) смещается в сторону точки O , а в момент опрокидывания сила \vec{N} проходит через эту точку и поэтому ее момент равен нулю.

Итак, выбором точки O для уравнения моментов мы исключаем из рассмотрения силу реакции пола и упрощаем решение задачи. Ясно, что сила \vec{F} будет минимальной, когда она прикла-

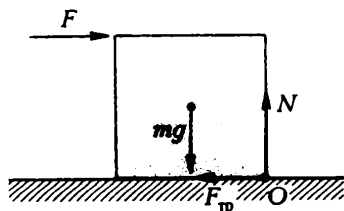


Рис. 7

дается к верхней грани кубика и равна по модулю

$$F = \frac{mg}{2}.$$

При любом ли коэффициенте трения между кубиком и полом возможно такое опрокидывание? Очевидно, нет. Для опрокидывания необходимо, чтобы при $F = mg/2$ кубик еще не начал скользить по плоскости. Следовательно,

$$\frac{mg}{2} \leq F_{\text{тр max}} = \mu mg, \quad \text{или} \quad \mu \geq \frac{1}{2}.$$

Интересно, что кубик можно опрокинуть и при меньшем коэффициенте трения, причем силой, меньшей чем $mg/2$. Подумайте, как при этом надо направить силу.

Упражнения

1. Каков должен быть коэффициент трения для того, чтобы клин, заколоченный в бревно, не выскальзывал из него? Угол при вершине клина $\alpha = 30^\circ$.

2. На наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α стоит цилиндр радиусом r . Какова наибольшая высота цилиндра, при которой он еще не опрокидывается? Цилиндр сделан из однородного материала.

3. Колесо радиусом r и массой m стоит перед ступенькой высотой h . Какую наименьшую горизонтальную силу надо приложить к оси колеса, чтобы оно могло подняться на ступеньку?

4. На земле лежат вплотную два одинаковых бревна цилиндрической формы. Сверху на них кладут такое же третье бревно. При каком минимальном коэффициенте трения между бревнами они не раскатятся? По земле бревна не скользят.

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

В. Можжев

Среди различных сил, действующих во Вселенной, пожалуй, самой распространенной является сила тяготения. Под действием этой силы планеты Солнечной системы, включая нашу Землю, движутся по своим орбитам вокруг Солнца. Эта сила притягивает к центру Земли все находящиеся на ней тела. Против этой силы была направлена вся мощь двигателей космического корабля, когда 4 октября 1957 года впервые в мире на околоземную орбиту был выведен искусственный спутник Земли.

Первым, кто понял роль силы тяготения, был Ньютон. Анализируя законы Кеплера, которые описывают движение планет по своим орбитам вокруг Солнца, он пришел к заключению, что для удержания планеты на орбите должна существовать сила, направленная точно от планеты к Солнцу и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. Однако главная заслуга Ньютона в том, что он сумел понять, что сила притяжения планеты к Солнцу — это частный случай силы тяготения, действующей между *любыми* двумя телами. Не случайно закон, открытый Ньютоном, называется законом *всемирного тяготения*. Это один из фундаментальных законов природы.

В простейшем случае, когда взаимодействующие тела можно считать материальными точками (размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними), закон всемирного тяготения формулируется так:

Любые две материальные точки притягивают друг друга с силой F , направленной по линии, их соединяющей, прямо пропорциональной их массам m_1 и m_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (*)$$

Здесь $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ — гравитационная постоянная (впервые она была измерена Кавендишем).

Если размерами тел пренебречь нельзя, тела нужно мысленно разбить на небольшие участки, такие, чтобы их можно было считать материальными точками. Для каждой пары материальных точек нужно записать закон тяготения в виде (*) и найти соответствующую силу притяжения, а затем — все полученные силы сложить. Оказывается, для сферически симметричных тел (например, для шара или сферического слоя) силу притяжения можно считать непосредственно по формуле (*), понимая под r расстояние между центрами масс взаимодействующих тел.

Гравитационные поля (поля тяготения) являются потенциальными, т. е. работа поля по перемещению тела из точки 1 в точку 2 не зависит от формы траектории, а определяется лишь разностью потенциальных энергий тела в точках 1 и 2 соответственно:

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2}.$$

Из этого равенства ясно, что определенный физический смысл имеет лишь разность потенциальных энергий в различных точках поля. Численное же значение потенциальной энергии в отдельной точке особого смысла не имеет, оно всегда определяется с точностью до некоторой постоянной величины. Вот почему при решении конкретных задач нулевой уровень потенциальной энергии можно выбирать произвольно, в наиболее удобной точке.

Обычно для определения потенциальной энергии тела массой m , поднятого на высоту h над землей, пользуются формулой

$$E_p = mgh.$$

Однако это равенство справедливо лишь для значений h , много меньших радиуса Земли R_3 ($h \ll R_3$). Если такое условие не выполняется, потенциальную энергию надо считать по-другому. Поясним это на конкретной задаче.

Задача 1. *Полагая в бесконечности (т. е. на большом расстоянии от Земли, где сила тяготения пренебрежимо мала) потенциальную энергию тела равной нулю, найдите зависимость потенциальной энергии E_p от расстояния r от центра Земли.*

Ограничимся областью $r \geq R_3$.

Потенциальная энергия E_p тела массой m , находящегося на расстоянии r от центра Земли, равна работе, которую совершает поле тяготения, перемещая это тело из данной точки в бесконечность. Поскольку в потенциальном поле работа не зави-

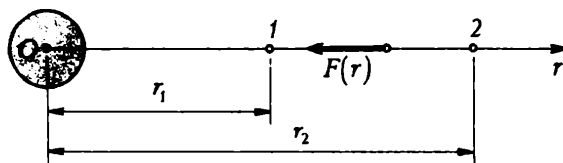


Рис. 1

сит от формы траектории, будем считать, что тело перемещается вдоль радиального направления. При перемещении тела из точки 1, находящейся на расстоянии r_1 от центра Земли (рис. 1), в точку 2, отстоящую от центра Земли на расстояние r_2 , поле совершает работу

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} -F(r)dr = \int_{r_1}^{r_2} -G \frac{mM_3}{r^2} dr = G \frac{mM_3}{r_2} - G \frac{mM_3}{r_1}.$$

При условии, что точка 2 бесконечно удалена, первое слагаемое равно нулю (при $r_2 \rightarrow \infty$ $1/r_2 \rightarrow 0$). Таким образом, зависимость потенциальной энергии от расстояния r от центра Земли имеет вид

$$E_p(r) = -G \frac{mM_3}{r},$$

где M_3 — масса Земли. График этой зависимости изображен на рисунке 2.

Разберем еще несколько задач.

Задача 2. Определите, какую минимальную скорость надо сообщить находящемуся на поверхности Земли телу для того,

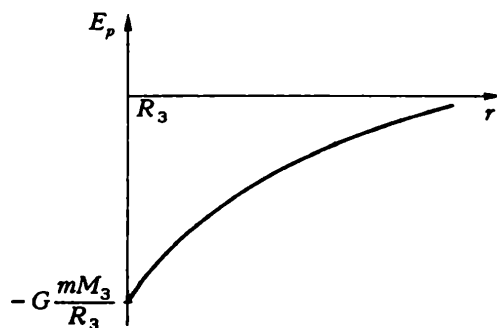


Рис. 2

чтобы оно ушло из сферы действия гравитационного поля Земли.

Прежде всего заметим, что искомую скорость называют второй космической скоростью v_{II} . Для определения ее модуля воспользуемся законом сохранения энергии.

Сразу же после запуска, т. е. непосредственно у поверхности Земли, кинетическая энергия тела равна $mv_{II}^2/2$, а его потенциальная энергия равна $-GmM_3/R_3$. Полная механическая энергия

$$E = \frac{mv_{II}^2}{2} - G \frac{mM_3}{R_3}.$$

Когда тело удалится от Земли на бесконечно большое расстояние (уйдет за пределы действия поля тяготения Земли), потенциальная энергия тела станет равной нулю. Очевидно, что при этом кинетическая энергия тоже обратится в нуль (мы ищем минимальную начальную скорость тела). Поскольку полная энергия тела не изменяется, получаем

$$\frac{mv_{II}^2}{2} - G \frac{mM_3}{R_3} = 0.$$

Отсюда

$$v_{II} = \sqrt{2G \frac{M_3}{R_3}} = \sqrt{2gR_3} \approx 11,2 \text{ км/с}$$

($g=9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения у поверхности Земли).

Заметим, что v_{II} в $\sqrt{2}$ раз больше $v_I = \sqrt{gR_3}$ — первой космической скорости, которую надо сообщить находящемуся на поверхности Земли телу для того, чтобы оно стало спутником Земли.

Задача 3. Искусственный спутник, используемый в системе телесвязи, запущен в плоскости земного экватора так, что все время находится в зените одной и той же точки земного шара. Во сколько раз радиус R орбиты спутника больше радиуса Земли $R_3=6400 \text{ км}$? Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g=9,8 \text{ м/с}^2$.

По условию задачи, спутник все время находится в зените одной и той же точки земного шара. Следовательно, спут-

ник равномерно движется по круговой орбите радиусом R , причем его угловая скорость ω равна угловой скорости вращения Земли ω_3 .

На спутник массой m действует одна сила — сила тяжести, модуль которой

$$F = G \frac{mM_3}{R^2}.$$

Эта сила и сообщает центростремительное ускорение спутнику:

$$G \frac{mM_3}{R^2} = m\omega^2 R.$$

Отсюда найдем ω^2 :

$$\omega^2 = G \frac{M_3}{R^3} = G \frac{M_3}{R_3^3} \frac{R_3^3}{R^3} = \frac{g}{R_3} \left(\frac{R_3}{R} \right)^3.$$

С другой стороны,

$$\omega^2 = \omega_3^2 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2,$$

где T — период обращения Земли вокруг собственной оси (сутки).

Приравнявая два последних выражения, получим

$$\left(\frac{R}{R_3} \right)^3 = \frac{g}{R_3} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \approx 300,$$

и

$$\frac{R}{R_3} \approx 6,7.$$

Задача 4. Космонавты, высадившиеся на Луну, должны возвратиться на базовый космический корабль, который летает по круговой орбите на высоте, равной радиусу Луны $R_{\text{Л}} = 1740$ км. Какую начальную скорость на поверхности Луны необходимо сообщить лунной кабине, чтобы стыковка с базовым кораблем стали возможной без дополнительной коррекции величины скорости кабины? Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_{\text{Л}} = 1,7$ м/с².

Запишем уравнение движения космического корабля:

$$G \frac{mM_{\text{Л}}}{(2R_{\text{Л}})^2} = \frac{mv_{\text{к}}^2}{2R_{\text{Л}}},$$

где m — масса корабля, $M_{\text{Л}}$ — масса Луны, а $v_{\text{к}}$ — линейная скорость движения корабля по круговой орбите. Из этого уравнения найдем

$$v_{\text{к}}^2 = G \frac{M_{\text{Л}}}{2R_{\text{Л}}} = G \frac{M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}^2} \frac{R_{\text{Л}}}{2} = g_{\text{Л}} \frac{R_{\text{Л}}}{2}.$$

Для того чтобы стыковка лунной кабины с базовым кораблем произошла без дополнительной коррекции, скорость кабины в момент сближения с кораблем должна быть равна по модулю скорости корабля. Связь между начальной скоростью кабины v на поверхности Луны и ее скоростью $v_{\text{к}}$ на орбите корабля можно найти из закона сохранения полной энергии кабины:

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{mM_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}} = \frac{mv_{\text{к}}^2}{2} - G \frac{mM_{\text{Л}}}{2R_{\text{Л}}}.$$

Подставляя в это уравнение выражение для $v_{\text{к}}^2$, получим

$$v = \sqrt{\frac{3}{2} g_{\text{Л}} R_{\text{Л}}} \approx 2,1 \text{ км/с}.$$

Упражнения

1. Камень бросают вертикально вверх на полюсе Земли со скоростью, равной первой космической для Земли. На какую высоту поднимется камень? Соппротивление воздуха не учитывать.

2. Один из спутников Юпитера движется по орбите радиусом $R_1 = 4,22 \cdot 10^5$ км и совершает полный оборот за время $T_1 = 1,77$ сут. Во сколько раз масса Юпитера больше массы Земли? Известно, что Луна движется по орбите радиусом $R_2 = 3,8 \cdot 10^5$ км с периодом $T_2 = 27,3$ сут.

3. Искусственный спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите радиусом R . Какую минимальную дополнительную скорость необходимо сообщить спутнику, чтобы он ушел из зоны притяжения Земли (на бесконечность)?

ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА И ШКОЛЬНАЯ ФИЗИКА

В. Белонучкин

На приемных экзаменах в вузы, например в Московский физико-технический институт, а также на школьных физических олимпиадах нередко встречаются задачи, в которых требуется рассмотреть движение планет (или их спутников) и определить соответствующие параметры их орбит. Большую помощь в решении таких задач может оказать знание законов Кеплера, с которыми учащиеся знакомятся в школьном курсе астрономии.

Вспомним законы Кеплера.

Первый закон: каждая планета обращается вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Второй закон: радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени описывает равные площади.

Третий закон: квадраты периодов обращения двух планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Если центральным «светилом» является не Солнце, а, например, Земля (или иная планета) и нас интересует движение ее спутников, также можно пользоваться законами Кеплера. Надо просто Солнце заменить на Землю, а планеты — на спутники.

Рассмотрим несколько задач, решение которых предполагает знание законов Кеплера. Попутно вспомним и другие, в частности количественные, сведения из астрономии; они тоже могут оказаться полезными при выяснении параметров орбит планет, комет, спутников.

Чуть более тридцати лет назад, 12 апреля 1961 года, человек, говоря словами К. Э. Циолковского, «вышел из колыбели» в Космос. Юрий Гагарин, первый космонавт Земли, на космическом корабле «Восток» совершил один оборот вокруг земного шара. Помните ли вы продолжительность этого полета? Если нет, то не можете ли рассчитать ее?

Задача 1. *Какова минимальная возможная продолжительность полета спутника вокруг Земли?*

В силу третьего закона Кеплера, полет вокруг Земли, требующий наименьшего времени, должен проходить по эллипсу с минимальной большой полуосью. Очевидно, что таким эллипсом является окружность (эллипс с совпадающими фокусами), примыкающая к поверхности земного шара.

Продолжительность полета можно вычислить различными способами. Мы выберем, может быть, не самый простой метод, но зато такой, который непосредственно использует законы Кеплера.

Вспомним, что естественный спутник Земли — Луна — совершает один оборот за время (звездный месяц) $T_{\text{л}} = 27,3 \text{ сут} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ с}$. Средний радиус орбиты Луны $r_{\text{л}} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ км}$, радиус Земли, а следовательно, и радиус «самой быстрой» (по времени) траектории спутника $R_3 = r_{\text{мин}} = 6,38 \times 10^3 \text{ км}$.

Остается подставить эти данные в выражение третьего закона Кеплера

$$\frac{T_{\text{мин}}^2}{T_{\text{л}}^2} = \frac{r_{\text{мин}}^3}{r_{\text{л}}^3},$$

и мы найдем

$$T_{\text{мин}} = T_{\text{л}} \left(\frac{r_{\text{мин}}}{r_{\text{л}}} \right)^{3/2} \approx 5,06 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 84 \text{ мин} = 1 \text{ ч } 24 \text{ мин}.$$

Заметим, что полет Ю. Гагарина продолжался 1 ч 48 мин, т. е. корабль «Восток» сделал чуть более одного витка.

Конечно, расчет параметров круговых орбит — дело сравнительно несложное. Мы могли бы, например, воспользоваться значением первой космической скорости для спутника, запускаемого с Земли, и, зная радиус его орбиты, вычислить период. Но когда приходится заниматься действительно эллиптическими орбитами, имеющими заметный эксцентриситет, нас могут выручить только законы Кеплера.

Задача 2. *Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите радиусом $3R_3$ (рис. 1). В результате кратковременного действия тормозного двигателя скорость спутника уменьшилась так, что он перешел на эллиптическую орбиту, касающуюся поверхности Земли. Через какое время после торможения спутник приземлится?*

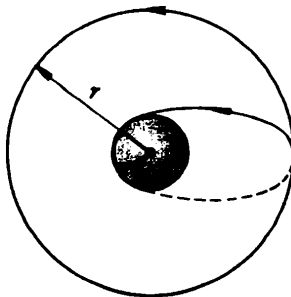


Рис. 1

До приземления спутник должен пройти половину эллиптической траектории, большая полуось которой, как нетрудно видеть, равна $2R_3$. Искомое время торможения τ можно найти непосредственно из третьего закона Кеплера, если использовать результаты предыдущей задачи:

$$\frac{(2\tau)^2}{T_{\min}^2} = \frac{(2R_3)^3}{R_3^3},$$

откуда

$$\tau = \sqrt{2}T_{\min} \approx 7,1 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 119 \text{ мин} \approx 2 \text{ ч.}$$

В 1986 году окрестности Солнца посетила, пожалуй, самая знаменитая комета Солнечной системы — комета Галлея. Впервые ученые смогли наблюдать ее не только с помощью приборов, расположенных на Земле: на свидание с кометой были отправлены автоматические космические станции. Давайте и мы проведем небольшое «исследование» кометы — ведь следующая встреча с ней «не за горами».

Задача 3. Минимальное расстояние кометы Галлея от Солнца $r_{\min} = 0,6 \text{ а. е.}$ (1 астрономическая единица = 1 а. е. = $1,5 \times 10^8 \text{ км}$ — радиус земной орбиты.) Зная период обращения кометы $T = 76 \text{ лет}$, найдите, насколько далеко она уходит от Солнца.

Мы недаром выбрали в качестве единицы времени год, а единицы длины — расстояние от Земли до Солнца. Ведь проще всего параметры орбиты кометы сравнить с параметрами орбиты Земли.

Из третьего закона Кеплера найдем большую полуось орбиты кометы Галлея a :

$$a = a_3 \left(\frac{T}{T_3} \right)^{2/3} = r_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{2/3} \approx 17,9 \text{ а. е.}$$

($r_0 = 1$ а. е., $T_0 = 1$ год). Теперь нетрудно определить максимальное удаление кометы от Солнца:

$$r_{\max} = 2a - r_{\min} \approx 35,2 \text{ а. е.} \approx 5,3 \cdot 10^9 \text{ км.}$$

Задача 4. *Используя сведения из задачи 3, оцените максимальную и минимальную скорости кометы Галлея.*

Перигелий орбиты кометы во много раз ближе к Солнцу, чем афелий. Следовательно, мы не допустим большой ошибки, если будем считать, что вблизи перигелия комета движется не по эллиптической, а по параболической орбите. Это означает, что в перигелии скорость кометы равна так называемой второй космической скорости (или параболической скорости) относительно Солнца, т. е. той минимальной скорости, при которой комета может преодолеть гравитационное притяжение Солнца.

Известно, что вторая космическая скорость v_{11} в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической скорости v_1 , вычисленной для того же расстояния от центра притяжения.* Значит, нам надо знать первую космическую скорость для расстояния $r_{\min} = 0,6$ а. е. от Солнца. А вычислить ее можно с помощью законов Кеплера, используя в качестве ориентира Землю и зная, что скорость движения Земли по орбите равна $v_0 = 30$ км/с (если вы не помните это значение, его можно легко вычислить, поделив длину орбиты на продолжительность периода обращения).

Теперь несколько преобразуем выражение третьего закона Кеплера — выразим период обращения через скорость и радиус:

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(2\pi r_1/v_{11})^2}{(2\pi r_2/v_{12})^2}, \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{v_{12}^2}{v_{11}^2}.$$

Таким образом, первые космические скорости и радиусы орбит (круговых) связаны соотношением

$$\frac{v_{11}}{v_{12}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}.$$

Отсюда для первой космической скорости кометы Галлея в пе-

* См., например, статью «Закон всемирного тяготения». Полученное там выражение для потенциальной энергии тела в поле тяготения позволяет, кстати сказать, найти точное решение задачи 4. Для этого достаточно применить закон сохранения энергии совместно со вторым законом Кеплера. Попробуйте сделать это самостоятельно. (Прим. ред.)

ригелии получаем

$$v_{\text{лк}} = v_0 \sqrt{\frac{r_0}{r_{\text{мин}}}}.$$

Следовательно, интересующая нас максимальная скорость, т. е. вторая космическая скорость кометы в перигелии, равна

$$v_{\text{max}} = v_{\text{п}} = v_{\text{лк}} = v_0 \sqrt{\frac{2r_0}{r_{\text{мин}}}} \approx 55 \text{ км/с.}$$

Скорость в афелии, или минимальную скорость $v_{\text{мин}}$ кометы Галлея, можно вычислить из второго закона Кеплера. Равенство площадей, «заметаемых» радиусом-вектором за одинаковые промежутки времени, означает, что длина радиуса-вектора (расстояние от Солнца) и скорость кометы в данной точке обратно пропорциональны друг другу, откуда

$$v_{\text{мин}} = v_{\text{а}} = v_{\text{лк}} \frac{r_{\text{мин}}}{r_{\text{max}}} \approx 0,93 \text{ км/с.}$$

Мы видим, что скорость кометы в афелии во много раз меньше скорости в перигелии. Очевидно, комета большую часть периода обращения проводит вдали от Солнца и лишь ненадолго навевывается в его окрестности.

Однако продолжим «исследование» кометы Галлея.

Задача 5. Какое время затрачивает комета Галлея на прохождение дальней от Солнца половины своей орбиты и какое — на прохождение ближней половины? Указание: площадь эллипса равна $S = \pi ab$ (a и b — большая и малая полуоси эллипса).

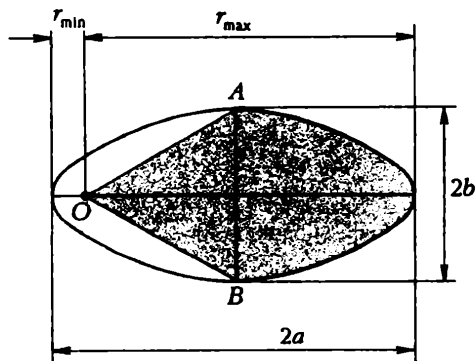


Рис. 2

Обратимся к рисунку 2, на котором Солнце находится в точке O . При прохождении дальней половины орбиты радиус-вектор кометы «заметает» площадь половины эллипса и площадь треугольника AOB . Эти площади равны соответственно

$$S_1 = \frac{\pi ab}{2}, \quad S_2 = b(a - r_{\min}).$$

Воспользуемся вторым законом Кеплера, сформулировав его в несколько ином виде — площадь, описываемая радиусом-вектором, изменяется пропорционально времени, и сравним времена прохождения кометой всей орбиты и дальней ее половины:

$$\frac{T}{T_x} = \frac{S}{S_1 + S_2}.$$

Отсюда для искомого времени получаем

$$T_x = T \frac{S_1 + S_2}{S} = T \left(\frac{1}{2} + \frac{a - r_{\min}}{\pi a} \right) = T \left(\frac{1}{2} + \frac{r_{\max} - r_{\min}}{\pi(r_{\max} + r_{\min})} \right) \approx 61 \text{ год.}$$

Остальные 15 лет тратятся на обход ближней с Солнцу половины орбиты. Как видим, эти времена различаются больше чем в 4 раза.

Упражнения

1. Орбита космического корабля «Восток» имела следующие параметры: высота в перигее $h = 181$ км, высота в апогее $H = 327$ км. Используя эти данные, уточните период обращения космического корабля Ю. Гагарина вокруг Земли.

2. Комета Григга — Скьеллерупа относится к группе Юпитера, т. е. ее афелий расположен неподалеку от орбиты крупнейшей планеты Солнечной системы, а именно на расстоянии $r = 5$ а.е. от Солнца. Период обращения кометы $T = 4,9$ года. Может ли эта комета пересечь орбиту Земли?

3. Из-за сравнительно большого эксцентриситета орбиты Плутона (большая полуось $a = 5,9 \cdot 10^9$ км, малая полуось $b = 5,73 \cdot 10^9$ км) его расстояние от Солнца заметно меняется — от минимального

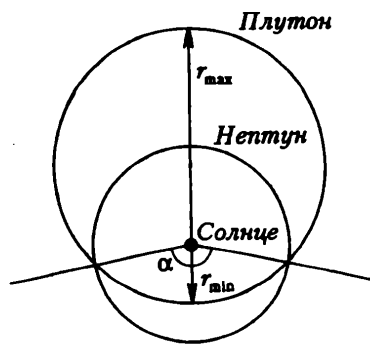


Рис. 3

$r_{\min} = 4,4 \cdot 10^9$ км до максимального $r_{\max} = 7,4 \cdot 10^9$ км. Планета Нептун движется по практически круговой траектории радиусом $R = 4,5 \cdot 10^9$ км. В результате часть орбиты Плутона, определяемая углом $\alpha = 100^\circ$ (рис. 3), расположена ближе к Солнцу, чем орбита Нептуна. В 1969 году Плутон перешел с девятого на восьмое место среди больших планет Солнечной системы. Когда он вернется на свое законное девятое место?

ИМПУЛЬС.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

И. Слободецкий

Импульсом (или количеством движения) материальной точки называется произведение ее массы на скорость. Так как скорость величина векторная, а масса — скалярная, то импульс — тоже векторная величина. Направление вектора импульса совпадает с направлением вектора скорости.

Если у нас имеется несколько материальных точек или частиц, то можно говорить об импульсе системы материальных точек — он равен векторной сумме импульсов отдельных точек. Например, для двух материальных точек, одна из которых имеет массу m_1 и скорость \vec{v}_1 , а вторая — массу m_2 и скорость \vec{v}_2 , импульс \vec{p} системы равен сумме импульсов обеих точек (рис. 1):

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2.$$

Важно не забывать, что импульсы частиц складываются векторно, т. е. геометрически (по правилу треугольника или по правилу параллелограмма). В том случае, когда скорости частиц направлены вдоль одной прямой, импульсы можно складывать алгебраически. При этом импульсы частиц, движущихся в противоположные стороны, следует брать с противоположными знаками.

Для того чтобы найти импульс тела, различные точки которого имеют разные скорости, его разбивают мысленно на маленькие части (в пределе — бесконечно маленькие) и затем

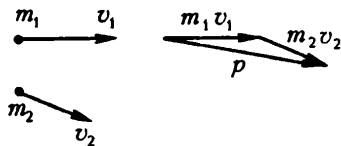


Рис. 1

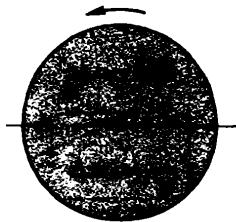


Рис. 2

складывают импульсы этих частей. Вычислим таким способом импульс однородного диска, вращающегося вокруг своей оси. Ясно, что всегда можно найти два таких элемента диска с массой Δm каждый, что их линейные скорости равны по абсолютной величине и противоположны по направлению (рис. 2). Сумма импульсов этих элементов, очевидно, равна нулю. А так как диск всегда можно разбить на пары таких элементов, то отсюда следует, что импульс всего диска равен нулю.

Иное дело, если диск катится по горизонтальной поверхности (рис. 3). Пусть скорость центра диска равна \vec{v}_0 . Скорость любого малого элемента Δm диска можно представить как сумму линейной скорости \vec{v}_1 ее вращения вокруг центра диска (в системе координат, связанной с центром диска) и скорости \vec{v}_0 ее поступательного движения:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_0.$$

Импульс диска равен сумме импульсов отдельных его элементов, т. е.

$$\vec{p} = \Sigma \Delta m \vec{v} = \Sigma \Delta m \vec{v}_1 + \Sigma \Delta m \vec{v}_0.$$

Первый член в этой сумме равен импульсу диска в системе координат, связанной с его центром. В этой системе центр диска неподвижен и импульс диска равен нулю. Поэтому импульс

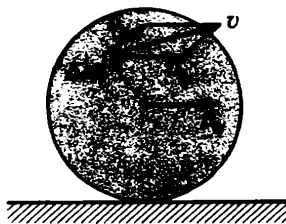


Рис. 3

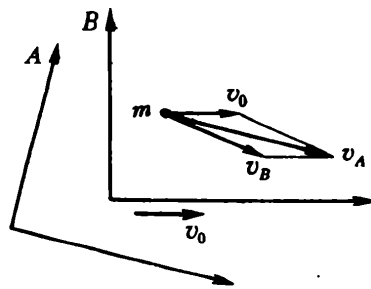


Рис. 4

диска, катящегося по горизонтальной плоскости, равен

$$\vec{p} = \Sigma \Delta m \vec{v}_0 = \vec{v}_0 \Sigma \Delta m = M \vec{v}_0,$$

где M — масса диска.

Импульс тела зависит от системы координат. Пусть в некоторой системе координат B тело массой m движется со скоростью \vec{v}_B . Его импульс

$$\vec{p}_B = m \vec{v}_B.$$

Пусть система координат B движется со скоростью \vec{v}_0 относительно системы координат A . Чтобы найти импульс тела в системе A , надо к \vec{p}_B прибавить $m \vec{v}_0$ — произведение массы тела на скорость системы координат B относительно системы A . Это — следствие того, что скорость любой точки в системе координат B складывается из скорости этой точки в системе A и скорости системы координат B относительно системы A (рис. 4):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_0.$$

Отсюда

$$\vec{p}_A = m \vec{v}_A = m \vec{v}_B + m \vec{v}_0 = \vec{p}_B + m \vec{v}_0.$$

Пользуясь понятием «импульс», второй закон Ньютона можно записать так:

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \vec{v})}{\Delta t}.$$

Если на тело действует сила \vec{F} в течение времени Δt , то импульс тела изменяется на величину

$$\Delta(m \vec{v}) = \vec{F} \Delta t.$$

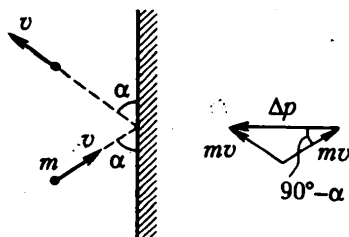


Рис. 5

Произведение силы \vec{F} на время действия Δt называют импульсом силы. И говорят, что изменение импульса тела равно импульсу действующей на него силы.

Воспользовавшись такой формой записи второго закона Ньютона, решим несколько задач.

Задача 1. Чему равна средняя сила, действующая на плиту, с которой абсолютно упруго сталкивается шарик массой m , летящий со скоростью v под углом α к плите (рис. 5)? Время соударения шарика с плитой τ .

Так как столкновение абсолютно упругое, шарик отскакивает от плиты под таким же углом α , под каким подлетает к ней, и с той же по величине скоростью v . Поэтому изменение импульса шарика при ударе равно

$$\Delta p = 2mv \cos(90^\circ - \alpha) = 2mv \sin \alpha$$

и направлено перпендикулярно плите. Это означает, что при столкновении шарика с плитой на шарик действует средняя сила

$$F = \frac{2mv \sin \alpha}{\tau}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, точно такая же сила, но направленная противоположно, действует и на плиту.

Задача 2. Две частицы с массами m и $2m$ движутся так, как показано на рисунке 6, а — первая частица (m) движется со скоростью v в направлении, перпендикулярном направлению движения второй частицы ($2m$), скорость которой равна $2v$. На частицы в некоторый момент времени начинают действовать одинаковые силы и действуют одинаковое время. После прекращения действия сил частица массой m движется со скоростью $2v$ в направлении, противоположном направлению ее первоначального движения. С какой скоростью и в каком направлении движется при этом вторая частица?

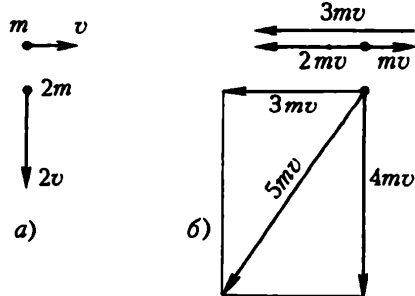


Рис. 6

Найдем импульс силы, действующей на каждую частицу. Не забывайте, что импульс и изменение импульса — величины векторные.

Импульс первой частицы изменился по направлению и по величине и стал равным $2mv$. Изменение импульса первой частицы равно $3mv$ (рис. 6, б). Так как на вторую частицу действует такая же сила в течение того же самого времени, то и импульс второй частицы меняется на $3mv$. Сложив первоначальный импульс второй частицы с изменением импульса, найдем, что импульс частицы массой $2m$ стал равен $5mv$ и направлен под углом $\alpha = \arctg(3/4)$ к направлению первоначального движения этой частицы. Разделив импульс частицы на ее массу, найдем, что скорость частицы массой $2m$ после прекращения действия силы равна $2,5v$.

Задача 3. Космический корабль, имеющий лобовое сечение $S = 50 \text{ м}^2$ и скорость $v = 10 \text{ км/с}$, попадает в облако микрометеоров, плотность которого $n = 1 \text{ м}^{-3}$ (т. е. в одном кубическом метре пространства находится один микрометеор). Масса каждого микрометеора $m = 0,02 \text{ г}$. На сколько должна возрасти сила тяги двигателя, чтобы скорость корабля не изменилась? Удар микрометеоров об обшивку корабля считайте абсолютно неупругим.

За время Δt корабль сталкивается с микрометеорами, которые в начальный момент находились от него на расстоянии, меньшем $v\Delta t$ (рис. 7). Масса всех этих микрометеоров равна

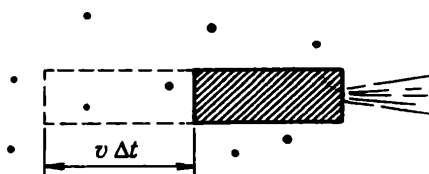


Рис. 7

$$M = mnSv\Delta t.$$

До столкновения с кораблем скорости и импульсы микрометеоров были равны нулю, а после неупругого столкновения с кораблем скорости микрометеоров стали равны v . Это означает, что при столкновении одного микрометеора с обшивкой корабля он приобретает импульс mv , а все микрометеоры, попавшие на обшивку корабля за время Δt , приобретают суммарный импульс

$$Mv = mnSv^2\Delta t.$$

Следовательно, на микрометеоры действует сила

$$F = \frac{Mv}{\Delta t} = mnSv^2.$$

Согласно третьему закону Ньютона, такая же по величине сила, но направленная в противоположную сторону, действует на обшивку корабля. Поэтому для того чтобы при попадании корабля в облако микрометеоров его скорость не изменилась, сила тяги двигателя корабля должна увеличиться на

$$F = mnSv^2 = 10^5 \text{ Н.}$$

Если на тело не действуют силы или действующие силы взаимно уравниваются, то импульс тела не меняется. Точно так же, если на систему тел не действуют внешние силы (такая система тел называется замкнутой или изолированной), то суммарный импульс системы тел не меняется.

Обсудим это на конкретных задачах.

Задача 4. *Нейтрон с энергией $E = 10^{-15}$ Дж поглощается первоначально неподвижным ядром кадмия ($A_1 = 112$). Определите скорость вновь образовавшегося ядра ($A_2 = 113$).*

Система «нейтрон — ядро» изолированная, и ее импульс не меняется. Если массу нейтрона обозначить m ($m = 1,67 \times 10^{-27}$ кг), а его скорость v , то

$$E = \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда найдем, что скорость нейтрона до его столкновения с ядром кадмия была

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}},$$

импульс нейтрона —

$$mv = \sqrt{2mE},$$

а импульс ядра был равен нулю. Поэтому до столкновения импульс системы был равен

$$p_1 = \sqrt{2mE}.$$

Если скорость ядра, образовавшегося в результате поглощения нейтрона ядром кадмия, обозначить u , а его массу M , то импульс этого ядра равен

$$p_2 = Mu.$$

Запишем теперь закон сохранения импульса:

$$p_1 = p_2, \text{ или } \sqrt{2mE} = Mu.$$

Отсюда найдем, что

$$u = \frac{\sqrt{2mE}}{M} = \frac{1}{A_2} \sqrt{\frac{2E}{m}} \approx 10^4 \text{ м/с}.$$

Задача 5. Ядро массой m , летящее со скоростью \vec{v} , распадается на два одинаковых осколка. Один из осколков летит со скоростью \vec{u}_1 под углом α к направлению полета ядра до его распада. Найдите скорость и направление полета второго осколка.

Напомним еще раз, что импульс — величина векторная. Поэтому, когда мы говорим о сохранении импульса изолированной системы, важно помнить, что сохраняется не только величина импульса, но и его направление. Сохраняются и составляющие импульса по любым направлениям, например по двум осям координат.

Введем такую систему координат: ось X направим по скорости ядра до распада, а ось Y — перпендикулярно ей (рис. 8). Если скорость второго осколка ядра обозначить \vec{u}_2 , а угол, который образует вектор \vec{u}_2 с направлением скорости ядра до распада (с осью X), β , то на основании закона сохранения импульса мы можем записать

$$\frac{m}{2} u_1 \cos \alpha + \frac{m}{2} u_2 \cos \beta = mv$$

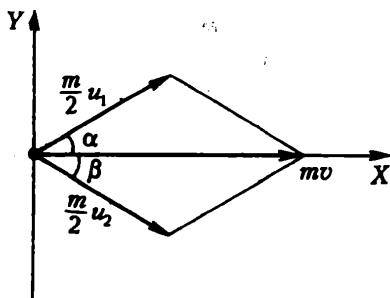


Рис. 8

— для составляющих импульсов по оси X ,

$$\frac{m}{2} u_1 \sin \alpha - \frac{m}{2} u_2 \sin \beta = 0$$

— для составляющих импульсов по оси Y .

Из этих уравнений находим

$$u_2 = \sqrt{u_1^2 + 4v^2 - 4vu_1 \cos \alpha},$$

$$\sin \beta = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + 4v^2 - 4vu_1 \cos \alpha}} \sin \alpha.$$

Если система не изолирована и на нее действует некоторая сила \vec{F} , то полный импульс системы не сохраняется. Однако сохраняется составляющая импульса в направлении, перпендикулярном силе \vec{F} . На этом основано решение большого числа задач. Рассмотрим, например, такую задачу.

Задача 6. На железнодорожной платформе, движущейся со скоростью v , укреплено орудие. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы и приподнят над горизонтом. Орудие произвело выстрел, после чего скорость платформы уменьшилась в n раз. Найдите скорость и снаряда (относительно земли), если он вылетает из ствола под углом α к горизонту. Масса снаряда m , масса платформы с орудием (без снаряда) M .

Система «орудие — платформа — снаряд» не является изолированной: на нее действуют сила тяжести и сила реакции земли. Однако в горизонтальном направлении на систему в целом внешние силы не действуют. Это означает, что горизонтальная составляющая импульса системы не должна при выстреле измениться, т. е.

$$m \cos \alpha + M \frac{v}{n} = (M + m)v.$$

Отсюда

$$u = v \frac{m + M(n-1)/n}{m \cos \alpha}.$$

Если система частиц или тел изолирована и ее импульс не меняется, то не меняется и скорость центра масс системы. В частности, если в некоторый момент система двигалась так, что скорость центра масс была равна нулю, то эта скорость остается равной нулю все время движения. Поэтому не изменяется и положение центра масс.

Вот — пример.

Задача 7. *Человек, масса которого m , находится на краю тележки массой M , стоящей на гладком полу. Длина тележки l . На сколько передвинется тележка, если человек перейдет с одного ее края на другой?*

Так как в горизонтальном направлении на систему «тележка — человек» силы не действуют, положение ее центра масс должно сохраниться неизменным. Но оно определяется положением центров масс тележки и человека.

Пусть первоначально расстояние между центром масс системы и центром масс тележки равно x . Тогда

$$Mx = m \left(\frac{l}{2} - x \right),$$

откуда

$$x = l \frac{m}{2(M+m)}.$$

Когда человек перейдет с края тележки на ее середину, то очевидно, положение его центра масс будет совпадать с положением центра масс системы. Следовательно, и положение центра масс тележки также должно совпадать с положением центра масс системы, т. е. тележка должна переместиться на расстояние x . На такое же расстояние переместится тележка при переходе человека с середины тележки на другой ее край. Следовательно, полное перемещение тележки будет равно

$$L = 2x = l \frac{m}{M+m}.$$

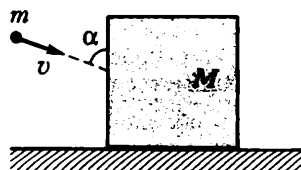


Рис. 9

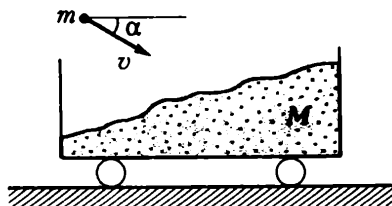


Рис. 10

Упражнения

1. Шарик, летящий горизонтально со скоростью v , ударяется о тяжелую стальную плиту, движущуюся ему навстречу со скоростью u . С какой скоростью будет двигаться шарик после абсолютно упругого соударения? Силой тяжести пренебречь.

2. Пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью v , попадает в брусок, лежащий на гладком полу, и пробивает его насквозь. Масса бруска M , скорость пули после вылета u . Какая часть первоначальной энергии пули перешла в тепло?

3. При взрыве снаряда массой $M=60$ кг образовались три одинаковых осколка. Их общая кинетическая энергия $E=2,9 \times 10^7$ Дж. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков, если до разрыва снаряд летел со скоростью $v=800$ м/с?

4. Гладкий шарик массой m , летящий со скоростью v , сталкивается под углом α с кубиком массой M , стоящим на гладком полу (рис. 9). Найдите скорость шарика после удара. Удар считайте абсолютно упругим.

5. Шарик массой m , летящий со скоростью, равной v и составляющей угол α с горизонтом, попадает в покоящуюся платформу с песком массой M (рис. 10) и застревает в песке. Найдите скорость платформы.

6. Найдите среднюю силу, действующую на плиту при абсолютно неупругом столкновении с ней шарика массой m , летящего со скоростью v в направлении, составляющем с плитой угол α . Время соударения равно τ .

7. С какой силой давит на плечо ручной пулемет при стрельбе, если масса пули $m=10$ г, ее скорость при вылете $v=800$ м/с и скорострельность пулемета $n=600$ выстрелов в минуту?

8. Два шарика падают в облаке пыли. Во сколько раз отличаются друг от друга скорости шариков, если диаметр одного из них вдвое больше диаметра другого?

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

А. Черноуцан

На приемных экзаменах в вуз нередко возникает ситуация, когда абитуриенты, хорошо зная законы сохранения энергии и импульса по отдельности, испытывают психологические трудности при необходимости соединить эти законы вместе в рамках одной задачи. Причем чаще всего от внимания ускользает более простой, на наш взгляд, закон — закон сохранения импульса. Записав соответствующее уравнение для энергии, абитуриент уже не вспоминает об импульсе — и ... попадает впросак. Впрочем, бывает и по-другому.

Рассмотрим несколько конкретных примеров того, как именно совместные «усилия» энергии и импульса приводят к нужному результату.

Задача 1. Два шарика, сделанные из одного материала и имеющие массы m_1 и m_2 , движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 . На сколько возрастет температура шариков после лобового абсолютно неупругого удара, если удельная теплоемкость шариков c ? Начальные температуры шариков были одинаковыми.

Изменение температуры шариков определяется увеличением их внутренней энергии:

$$\Delta E_{\text{вн}} = c(m_1 + m_2)\Delta t.$$

Часто абитуриенты ошибочно считают, что в результате удара во внутреннюю энергию переходит вся начальная кинетическая энергия системы. При этом они забывают, что шарики не могут остановиться после удара, так как это противоречило бы закону сохранения импульса — начальный импульс системы, вообще говоря, не равен нулю. Значит, при подсчете энергии надо учесть и кинетическую энергию шариков в конечном состоянии.

Обозначим скорость слипшихся после абсолютно неупругого удара шариков через v и запишем законы сохранения энергии

и импульса, точнее — проекции импульса на направление движения первого шарика:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + \Delta E_{\text{вн}},$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v.$$

Решая совместно полученные три уравнения, находим искомое увеличение температуры:

$$\Delta t = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2c(m_1 + m_2)^2}.$$

Задача 2. Два вагона, массы которых M_1 и M_2 , движутся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2 . При столкновении происходит сжатие четырех одинаковых буферных пружин, после чего вагоны расходятся. Найдите максимальную деформацию каждой пружины, если ее жесткость k .

В этой задаче, в отличие от предыдущей, можно использовать закон сохранения механической энергии (подразумевается, что трение мало, а пружины идеальные), приравняв начальную энергию вагонов к энергии системы в тот момент, когда деформация пружин x максимальна. При этом искомая величина войдет в потенциальную энергию упругой деформации пружин $4kx^2/2$. Однако, кроме этой энергии, надо учесть еще и кинетическую энергию вагонов.

Тот факт, что при максимальном сближении вагоны не останавливаются (о чем, к сожалению, забывают многие абитуриенты), следует, как и в предыдущей задаче, из закона сохранения импульса. Единственная особенность этого момента состоит в том, что при максимальной деформации пружин скорости вагонов одинаковы — обозначим их общую скорость v . Поэтому законы сохранения энергии и импульса (вернее — его проекции) выглядят следующим образом:

$$\frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2} = \frac{(M_1 + M_2) v^2}{2} + 4 \frac{kx^2}{2},$$

$$M_1 v_1 - M_2 v_2 = (M_1 + M_2) v.$$

Отсюда получаем

$$x = \frac{v_1 + v_2}{2} \sqrt{\frac{M_1 M_2}{k(M_1 + M_2)}}.$$

Задача 3 (баллистический маятник). В брусок массой M , висящий на параллельных нитях длиной l , попадает горизонтально летящая пуля массой m и застревает в нем (рис. 1). В ре-

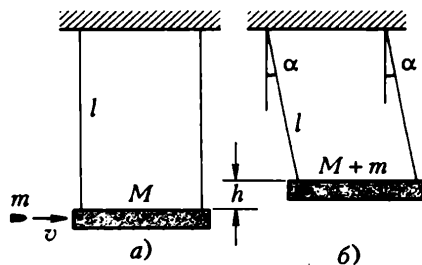


Рис. 1

зультате удара каждая нить отклоняется на угол α . Найдите начальную скорость пули. Нити считайте идеальными (невесомыми и нерастяжимыми).

Как видно из рисунка, угол отклонения нитей α связан с высотой h , на которую поднимается брусок:

$$h = l(1 - \cos \alpha),$$

а высоту h можно связать с потенциальной энергией бруска и пули в конечном состоянии:

$$E_p = (M + m)gh.$$

Возникает вопрос: выполняется ли в данной ситуации закон сохранения механической энергии? Другими словами, равна ли энергия системы в конечном состоянии ее начальной энергии, т. е. кинетической энергии пули $mv^2/2$? Ответ, конечно, отрицательный. Ведь мы знаем, что при неупругом ударе часть механической энергии переходит во внутреннюю. Как же быть?

Рассмотрим еще одно, промежуточное состояние системы — сразу после окончания удара, когда пуля уже застряла в бруске, но нити еще вертикальны. Энергия системы в этом состоянии представляет собой просто кинетическую энергию бруска с пулей:

$$E_k = \frac{(M + m)u^2}{2},$$

где u — их общая скорость. После того как неупругий удар уже закончился, энергия больше теряться не будет, и можно записать

$$E_k = E_p,$$

или

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = (M + m)gh.$$

Скорость u можно связать с начальной скоростью пули с помощью закона сохранения импульса:

$$mv = (M + m)u.$$

Из последних двух уравнений, с учетом выражения для h , имеем

$$v = 2 \left(1 + \frac{M}{m} \right) \sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Заметим, что в этой задаче законы сохранения импульса и энергии работают не одновременно, а как бы по очереди. Понять это оказывается не так просто, и многие абитуриенты решают задачи такого типа с помощью одного закона сохранения энергии, получая, конечно же, неправильные результаты.

Задача 4. На бруске длиной l и массой M , расположенном на гладкой горизонтальной поверхности, лежит маленькое тело массой m (рис. 2). Коэффициент трения между телом и бруском μ . С какой скоростью должна двигаться система, чтобы после упругого удара бруска о стенку тело упало с бруска?

Удар бруска о стенку приведет к тому, что его скорость скачком изменится на противоположную. Скорость же тела за время удара измениться не успеет, и оно начнет скользить по бруску.

Найдем, на какое расстояние x переместится тело относительно бруска до окончания скольжения. Ясно, что условие $x > l$ и будет условием падения тела с бруска. С расстоянием x связана работа силы трения скольжения

$$A_{\text{тр}} = -\mu mgx,$$

которая, в свою очередь, равна изменению кинетической энергии системы:

$$A_{\text{тр}} = \frac{(m+M)u^2}{2} - \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} \right).$$

Здесь u — скорость бруска с телом в тот момент, когда тело останавливается относительно бруска. Эту скорость можно найти из закона сохранения импульса

$$Mv - mv = (m+M)u.$$

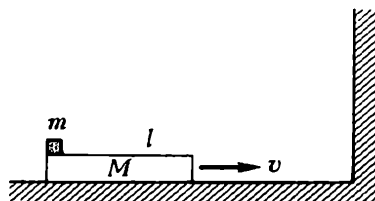


Рис. 2

Решая совместно все три уравнения, получаем

$$x = \frac{2Mv^2}{\mu g(m+M)}.$$

Условие $x > l$ позволяет найти искомую скорость:

$$v > \sqrt{\frac{1}{2} \mu g l \left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

(Вопрос о том, почему работа силы трения связана с перемещением тела относительно бруска, хотя брусок сам тоже перемещается, подробно разобран в статье «Изменение механической энергии». — *Прим. ред.*)

В заключение разберем задачу на расчет ядерной реакции. В этой задаче более отчетливо, чем в предыдущих, выступает векторный характер закона сохранения импульса.

Задача 5. Для проведения реакции синтеза тяжелого и сверхтяжелого изотопов водорода (${}^2\text{H} + {}^3\text{H} = {}^4\text{He} + n$) ускоренные до энергии $E = 2$ МэВ ядра дейтерия направляют на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно направлению пучка дейтронов. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия $\Delta E = 14$ МэВ.

Закон сохранения энергии в этой реакции имеет вид

$$\frac{m_d v_d^2}{2} = \frac{m_r v_r^2}{2} + \frac{m_n v_n^2}{2} - \Delta E$$

(здесь и далее индекс «д» обозначает дейтерий, «г» — гелий, «н» — нейтрон). Закон сохранения импульса надо записать в проекциях как на ось X (направление скорости падающих дейтронов), так и на ось Y (направление вылета регистрируемых нейтронов):

$$m_d v_d = m_r v_{rx}, \quad 0 = m_n v_n - m_r v_{ry}.$$

Принимая во внимание, что

$$v_r^2 = v_{rx}^2 + v_{ry}^2,$$

получаем

$$\frac{m_n v_n^2}{2} \left(1 + \frac{m_n}{m_r}\right) = \Delta E + \frac{m_d v_d^2}{2} \left(1 - \frac{m_d}{m_r}\right).$$

Отсюда, учитывая, что $m_n/m_r = 1/4$, $m_d/m_r = 1/2$, а $m_d v_d^2/2 = E$, находим энергию регистрируемых нейтронов:

$$\frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{4}{5} \left(\Delta E + \frac{1}{2} E\right) = 12 \text{ МэВ}.$$

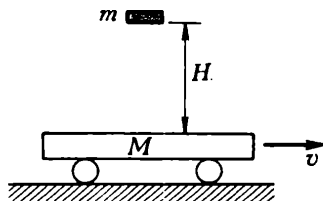


Рис. 3

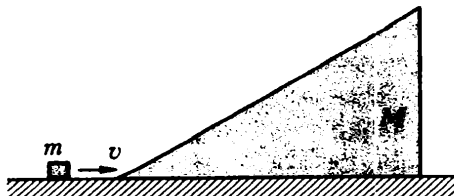


Рис. 4

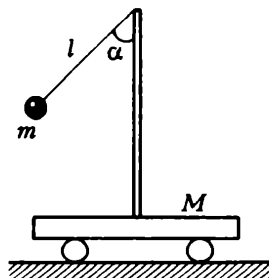


Рис. 5

Упражнения

1. Тележка массой M движется со скоростью v по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 3). На тележку с высоты H падает кирпич и остается на тележке. Какое количество теплоты выделится при ударе? Масса кирпича m .

2. Летящее ядро в результате ядерной реакции распадается на два осколка. Массы осколков m_1 и m_2 , а их скорости v_1 и v_2 составляют между собой угол α . Какая энергия выделяется в этой реакции?

3. Брусок массой M , лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплен к вертикальной стене пружиной жесткостью k . В брусок попадает горизонтально летящая пуля и застревает в нем. Найдите максимальную деформацию пружины. Масса пули m , ее скорость v .

4. На гладкой горизонтальной плоскости стоит клин массой M (рис. 4). На клин въезжает тело массой m , двигавшееся по плоскости со скоростью v . На какую максимальную высоту поднимется тело по клину? Нижняя часть клина имеет плавное соединение с плоскостью.

5. На тележке укреплен штатив, к которому с помощью нити прикреплен шарик (рис. 5). Сначала нить с шариком удерживают под углом α к вертикали, а потом отпускают. Найдите максимальную скорость, приобретаемую тележкой. Масса тележки со штативом M , масса шарика m , длина нити l . Тележка находится на гладкой горизонтальной плоскости.

ИЗМЕНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

А. Черноуцан

Механическая энергия системы тел может изменяться по двум причинам. Во-первых, к изменению энергии может привести наличие внешних сил (в том случае, разумеется, если работа этих сил не равна нулю). А во-вторых, даже если внешние силы отсутствуют, т. е. система тел является замкнутой, ее механическая энергия может не сохраняться.

Например, при действии внутри системы — между входящими в нее телами — сил трения, сопротивления или других так называемых диссипативных сил происходит переход части механической энергии во внутреннюю, тепловую энергию тел. Примером такого процесса, в котором происходит уменьшение механической энергии под действием сил диссипативной природы, является неупругий удар. Пример противоположного рода — разрыв снаряда, при котором механическая энергия также не сохраняется, но не убывает, а возрастает. Дело здесь в том, что в результате химической реакции горения взрывчатого вещества большое количество внутренней химической энергии очень быстро переходит в механическую. Подобное происходит и при работе двигателя внутреннего сгорания. Такую же роль может сыграть и человек, когда он совершает работу за счет своих внутренних энергетических ресурсов (пример: вы поднимаете с земли камень и затем бросаете его).

Но сумма механической и внутренней энергии в случае замкнутой системы остается постоянной — это и есть общий принцип сохранения энергии, выходящий далеко за рамки механики.

Для полноты картины давайте вспомним, какие же силы «угрожают» закону сохранения механической энергии, т. е. не приводят ни к потере, ни к производству этой энергии. Это хорошо известные вам силы: тяжести, упругости, кулоновского взаимодействия и другие так называемые консервативные силы, т. е. силы, работа которых по замкнутой траектории равна нулю. Соответственно, диссипативные силы, о которых шла речь выше, называют неконсервативными.

Полезно иметь в виду, что для любого консервативного взаимодействия можно определить соответствующую ему потенциальную энергию, а для неконсервативного это сделать невозможно. Значит, если для какого-то взаимодействия известна потенциальная энергия, то оно наверняка консервативное.

Все сказанное, конечно же, известно любому школьнику из учебника физики. Поэтому, увидев, что в условии задачи упоминается, к примеру, сила трения (или коэффициент трения), абитуриент зачастую отказывается от мысли использовать при решении задачи энергетические соображения. И он прав в том смысле, что неправильно было бы пытаться записать закон сохранения механической энергии. Но можно и нужно в таких случаях применять формулу для изменения механической энергии, которая связывает изменение механической энергии с работой сил, приводящих к этому:

$$\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{внешн}} + A_{\text{внутр}}^* \quad (*)$$

Здесь $A_{\text{внешн}}$ — работа внешних сил, а $A_{\text{внутр}}^*$ — работа внутренних неконсервативных сил (чаще всего — работа сил трения или сопротивления).

Чтобы правильно использовать эту формулу, полезно опираться на следующее простое правило: в правой части надо учитывать работу всех сил, которые не учтены в выражении для потенциальной энергии системы. Например, если вам почему-то удобнее учесть силу тяжести в работе, стоящей в правой части уравнения (*), то выражение для энергии уже не должно содержать члена mgh .

А теперь — несколько конкретных задач.

Задача 1. На горизонтальной плоскости лежит тело массой m , соединенное с вертикальной стеной легкой пружиной жесткостью k (рис. 1). В начальный момент пружина не деформирована. На тело начинает действовать постоянная сила F . Считая, что коэффициент трения между телом и плоскостью μ и что $F > \mu mg$, найдите максимальное смещение тела от начального положения и максимальную скорость тела в процессе движения.

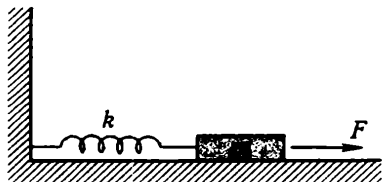


Рис. 1

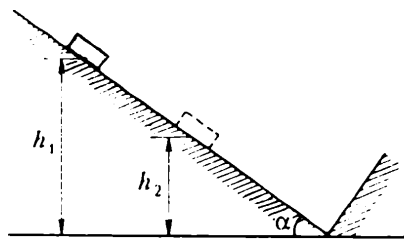


Рис. 2

В этом случае изменение механической энергии системы — кинетической энергии тела $mv^2/2$ и потенциальной энергии упруго деформированной пружины $kx^2/2$ — происходит под действием внешней силы F и силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = Fx - \mu mgx.$$

Максимальное смещение тела соответствует моменту, когда скорость тела обратится в ноль, поэтому получаем

$$x_m = \frac{2}{k} (F - \mu mg).$$

Чтобы определить максимальную скорость тела, надо найти соответствующее этому моменту значение x . Ясно, что скорость тела будет максимальной в тот момент, когда ускорение станет равным нулю. Из второго закона Ньютона

$$F - \mu mg - kx = 0$$

выражаем x и, подставляя в закон изменения механической энергии, находим

$$v_m = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{F - \mu mg}{k}}.$$

Заметим, что если бы мы захотели определить также, какое количество механической энергии переходит во внутреннюю, нам достаточно было бы вычислить работу силы трения и взять ее с противоположным знаком. Например, к моменту остановки тела выделится количество теплоты

$$Q = -A_{\text{тр}} = \mu mgx_m.$$

Задача 2. Маленькое тело кладут на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, и отпускают (рис. 2). В нижней точке плоскости тело ударяется об упор, отскакивает без потери скорости и поднимается обратно по наклонной плоскости на некоторую высоту. Найдите эту высоту h_2 , если начальная высота тела h_1 , а коэффициент трения тела о плоскость μ ($\mu < \text{tg} \alpha$).

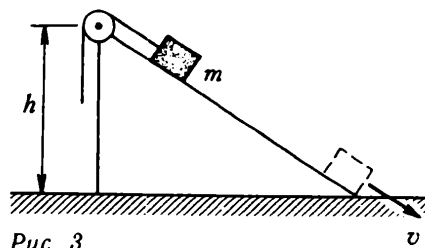


Рис. 3

В отличие от предыдущего случая, здесь внешних сил нет (по отношению к системе «тело — Земля»), и изменение механической энергии происходит только под действием силы трения.

Работа силы трения вычисляется весьма просто, так как величина силы трения не зависит от того, в какую сторону движется тело. Учитывая, что как в начальном, так и в конечном состоянии кинетическая энергия тела равна нулю, запишем уравнение (*) в виде

$$mgh_2 - mgh_1 = -\mu mg \cos \alpha \cdot \left(\frac{h_1}{\sin \alpha} + \frac{h_2}{\sin \alpha} \right),$$

где $h_1/\sin \alpha$ и $h_2/\sin \alpha$ — пути, пройденные телом вниз и вверх по наклонной плоскости, а знак «--» в правой части учитывает то, что работа силы трения отрицательна. Таким образом, получаем

$$h_2 = h_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{\operatorname{tg} \alpha + \mu}.$$

Задача 3. Груз массой m медленно поднимают на высоту h по наклонной плоскости с помощью блока и троса (рис. 3). При этом совершают работу A . Затем трос отпускают, и груз скользит вниз. Найдите величину A , если известно, что скорость тела в конце спуска равна v .

Поскольку в условии задачи речь сразу же идет о работе или энергии, то энергетический подход к решению может оказаться тем более выигрышным, что избавит нас от необходимости выражать в явном виде силы.

Запишем формулу (*) для изменения механической энергии сначала при подъеме груза:

$$mgh - 0 = A + A_{\text{тр}},$$

а потом при спуске:

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = A_{\text{тр}}$$

(работа силы трения $A_{\text{тр}}$ одинакова при подъеме и при спуске). Из этих уравнений находим

$$A = 2mgh - \frac{mv^2}{2}.$$

Задача 4. Тело массой m съезжает с высоты h гладкой наклонной плоскости и начинает скользить по тележке массой M , находящейся на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 4). Коэффициент трения тела о поверхность тележки μ . На какое расстояние переместится тело относительно тележки?

В этой задаче закон изменения механической энергии системы мы применим совместно с законом сохранения импульса.

Скорость тела v_1 у основания наклонной плоскости найдем из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgh, \quad v_1 = \sqrt{2gh},$$

а конечную скорость v_2 совместного движения тела и тележки вычислим с помощью закона сохранения импульса:

$$mv_1 = (m + M)v_2, \quad v_2 = v_1 \frac{m}{m + M}.$$

Изменение энергии системы «тело — тележка» — это работа действующей между ними силы трения:

$$\frac{(m + M)v_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -F_{\text{тр}}L,$$

где L — расстояние, пройденное телом по тележке. Учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$, получаем

$$L = h \frac{M}{\mu(m + M)}.$$

Возникает вопрос: почему мы рассчитываем работу силы трения так, как будто тележка покоится, а тело перемещается по ней на расстояние L ? Разве работа не зависит от системы отсчета? Ответ заключается в следующем. Конечно, работа

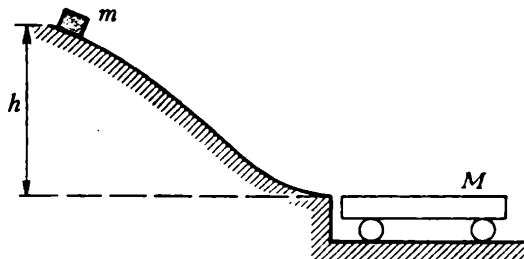


Рис. 4

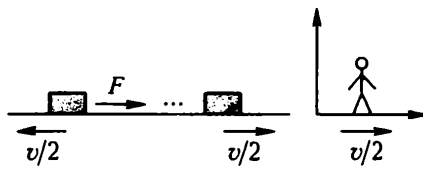


Рис. 5

любой силы, приложенной к телу, зависит от системы отсчета. Например, если какая-то сила разогнала тело массой m из состояния покоя до скорости v , то работа этой силы положительна и равна изменению кинетической энергии тела:

$$A = \frac{mv^2}{2} - 0.$$

Если же рассмотреть этот же процесс в системе отсчета, движущейся со скоростью $v/2$ (рис. 5), то начальная скорость тела будет равна $-v/2$, а конечная $+v/2$, и работа окажется равной нулю:

$$A = \frac{m(v/2)^2}{2} - \frac{m(-v/2)^2}{2} = 0.$$

Однако в нашей задаче, проводя все рассуждения с точки зрения неподвижного наблюдателя, мы должны рассчитать работу сил трения как над телом, так и над тележкой — именно полная работа сил трения в уравнении (*) равна изменению кинетической энергии системы:

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}s - F_{\text{тр}}(s + L) = -F_{\text{тр}}L.$$

Здесь s — перемещение тележки, $s + L$ — перемещение тела, работа силы трения над тележкой положительна, а над телом — отрицательна. Таким образом, общий итог получается точно таким же, как если бы тележка покоилась, а тело переместилось на расстояние L .

Тот факт, что полная работа сил трения не зависит от системы отсчета, имеет совершенно прозрачный физический смысл, с энергетической точки зрения. В самом деле, полная работа сил трения равна, с противоположным знаком, изменению внутренней (тепловой) энергии тела и тележки, которое, очевидно, не должно зависеть от системы отсчета (ведь изменение температуры тела не зависит от того, какой наблюдатель его измеряет).

Задача 5. Человек бросает камень массой m со скоростью \vec{v} в горизонтальном направлении. В неподвижной системе отсчета работа человека над камнем равна $mv^2/2$, а в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}/2$, эта работа равна нулю. Не

противоречит ли этот факт утверждению, что работа совершается человеком за счет ресурсов собственной внутренней энергии и потому не должна зависеть от системы отсчета?

С точки зрения баланса энергий, работа человека не должна зависеть от системы отсчета. Однако работа человека над камнем явно различна в разных системах отсчета. Как же так?

Все дело в том, что человек совершает работу не только над камнем, но и над ... Землей, и для восстановления правильного баланса энергий надо учесть изменение энергии Земли при броске камня. Эти рассуждения кажутся весьма непривычными, так как обычно молчаливо предполагается, что изменением скорости Земли можно пренебречь (масса Земли очень велика), и учитывается только кинетическая энергия тел, движущихся в поле тяжести Земли. И все-таки доведем наши рассуждения до конца.

Приращение скорости Земли $\Delta \vec{V}$ можно найти из закона сохранения импульса системы «камень — Земля» (обозначим массу Земли через M):

$$m\vec{v} + M\Delta\vec{V} = 0, \quad \Delta\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}.$$

В системе отсчета, где начальная скорость Земли равна нулю, приращение кинетической энергии Земли ничтожно мало, и мы его обычно не учитываем:

$$\Delta E_3 = \frac{M(\Delta V)^2}{2} = \frac{m m v^2}{M \cdot 2} \ll \frac{m v^2}{2}.$$

Однако в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}/2$, изменение кинетической энергии Земли отнюдь не является пренебрежимо малым:

$$\frac{1}{2} M \left(\frac{v}{2} + \Delta V \right)^2 - \frac{1}{2} M \left(\frac{v}{2} \right)^2 \approx \frac{1}{2} M v \Delta V = \frac{m v^2}{2}.$$

Видно, что и здесь полная работа человека равна $m v^2/2$, только она совершается не над камнем, а над Землей.

Таким образом, необходимо иметь в виду, что изменение кинетической энергии очень тяжелого тела (Земли, стенки и т. п.) можно считать ничтожно малым только в той системе отсчета, где это тело в начальный момент покоится.

Задача 6. Шарик, подвешенный на пружине жесткостью k , погружен в жидкость. Плотность материала шарика ρ больше, чем плотность жидкости $\rho_{\text{ж}}$. Вначале шарик удерживают в таком положении, что пружина не деформирована, а затем отпускают. Какое количество теплоты выделится в системе к тому моменту, когда колебания шарика прекратятся и он остановится? Объем шарика V .

Прежде всего отметим, что выражение «выделяется такое-то количество теплоты» нельзя назвать удачным с сегодняшней точки зрения. Оно сохранилось и продолжает использоваться по чисто историческим причинам. На современном языке оно означает: «на столько-то увеличивается внутренняя, тепловая энергия тел системы».

Теперь — по существу. В нашей задаче изменение внутренней энергии системы «тело — жидкость — Земля» (обозначим его через Q), взятое с противоположным знаком, равно работе силы сопротивления и может быть вычислено как уменьшение механической энергии системы:

$$Q = -A_{\text{сопр}} = -\Delta E_{\text{мех}}.$$

Кинетическая энергия равняется нулю как в начальном, так и в конечном состоянии, так что нам надо найти изменение только потенциальной энергии. Здесь часто встречается ошибка, которая состоит в том, что, учитывая изменение потенциальной энергии пружины ($kx^2/2$) и потенциальной энергии шарика ($-mgx$), забывают учесть изменение потенциальной энергии жидкости. Смысл этого вклада в изменение энергии иллюстрирует рисунок 6: одновременно с перемещением шарика вниз происходит перемещение объема жидкости вверх из того места, где находится шарик в конечный момент, в то место, где он находился вначале.

Итак,

$$Q = -\frac{kx^2}{2} + mgx - m_{\text{ж}}gx.$$

Смещение x можно найти из условия равновесия шарика

$$-mg + m_{\text{ж}}g + kx = 0,$$

где $m_{\text{ж}}g$ — сила Архимеда. Учитывая, что $m = \rho V$ и $m_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}}V$, получаем окончательно

$$Q = \frac{(\rho - \rho_{\text{ж}})gV)^2}{2k}.$$

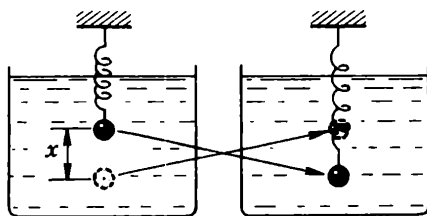


Рис. 6



Рис. 7

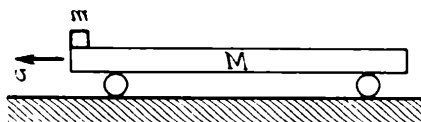


Рис. 8

Заметим, что можно было не думать об изменении энергии жидкости, но тогда, записывая закон изменения механической энергии, необходимо было учесть работу силы Архимеда как внешней силы по отношению к системе «тело — Земля»:

$$\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{сопр}} + A_{\text{арх}} = -Q - m_{\text{ж}} g x$$

(работа силы Архимеда при движении шарика вниз отрицательна). Такой более формальный подход иногда оказывается проще и надежнее.

Упражнения

1. Тело съезжает с наклонной плоскости, высота которой h , а основание b . Какой путь пройдет тело по горизонтали, если коэффициент трения на всем пути μ ? Участок перехода с наклонной плоскости на горизонтальную считать плавным и гладким.

2. Два тела, массы которых m_1 и m_2 , соединены недеформированной пружиной и лежат на горизонтальной поверхности (рис. 7). На первое тело начинает действовать постоянная сила F . При каком минимальном значении этой силы второе тело сдвинется с места? Коэффициент трения тел о поверхность μ .

3. Маленькое тело массой m лежит на краю длинной тележки (рис. 8). Тележке ударом сообщают скорость v . На сколько переместится тело относительно тележки, если масса тележки M , а коэффициент трения между телом и тележкой μ ? Трением между тележкой и плоскостью пренебречь.

4. После выстрела вслед грузовику, движущемуся со скоростью $v = 10$ м/с, пуля застревает в задней стенке кузова. Считая, что начальная скорость пули $v_0 = 100$ м/с, а ее масса $m = 20$ г, найдите количество теплоты, выделившееся при ударе.

5. Маленький шарик объемом V поднимают на высоту h_1 над поверхностью жидкости и отпускают. Упав в жидкость, шарик погружается на глубину h_2 , после чего начинает всплывать. Найдите количество теплоты, которое выделится в системе к моменту максимального погружения шарика. Плотность материала шарика ρ меньше плотности жидкости $\rho_{\text{ж}}$.

ГИДРОСТАТИКА

А. Буздин, С. Кротов

Прежде всего напомним основные законы гидростатики.

Жидкости и газы при движении как целое представляют собой механическую систему, части которой взаимодействуют друг с другом посредством только сил давления. Действительно, когда жидкость (здесь и далее, говоря о жидкости, мы подразумеваем и газ тоже) находится в покое, вязкость не проявляется — жидкое трение возникает лишь при движении слоев жидкости друг относительно друга или относительно твердого тела.

Для жидкости, как известно, выполняется закон Паскаля: *давление, производимое на жидкость, передается без изменения в каждую точку жидкости*. Если жидкость находится под действием только силы тяжести, давление p увеличивается с глубиной погружения h по закону $p = \rho gh$, где ρ — плотность жидкости. Поэтому различные участки тела, погруженного в жидкость, испытывают разные силы давления. В результате их суммарного действия возникает выталкивающая сила (архимедова сила). Согласно закону Архимеда, *тело, целиком погруженное в жидкость, выталкивается кверху с силой, равной весу вытесненной им жидкости (т. е. весу жидкости в объеме этого тела)*.

Сразу же обратим внимание на тот факт, что закон Архимеда неприменим, когда погруженное тело плотно прижато к стенкам или дну сосуда. Например, известно, что подводная лодка, опустившаяся на илистое дно, под действием силы гидростатического давления прижимается ко дну, а вовсе не выталкивается кверху.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. *На одной из чашек уравновешенных весов находится стакан с водой и штатив с подвешенным к нему грузом (рис. 1). Что произойдет с равновесием весов, если нить удлинить настолько, чтобы груз оказался в воде?*

Многие абитуриенты считают, что равновесие нарушится. В качестве причины одни называют выталкивающую силу, действующую на груз по закону Архимеда и уменьшающую натяжение нити, а значит, и силу давления штатива на чашку весов. Другие считают, что после погружения в воду груз будет давить на нее с добавочной силой или, что эквивалентно, повысит уровень воды в стакане и тем самым увеличит давление на дно стакана, в результате чего левая чашка перевесит.

Чтобы получить правильный ответ, достаточно понять, что содержимое чашки не меняется в зависимости от положения груза — вне воды или в воде, и поэтому равновесие весов сохраняется. Но что же было неверного в предыдущих рассуждениях?

При опускании груза в воду натяжение нити действительно уменьшится на величину выталкивающей силы, действующей на груз, и поэтому уменьшится сила давления штатива на чашку. Однако, согласно третьему закону Ньютона, на величину выталкивающей силы возрастет сила, действующая со стороны груза на воду и на дно сосуда. Таким образом, давление стакана на чашку увеличится. Причем уменьшение силы давления штатива будет в точности скомпенсировано увеличением силы давления стакана на чашку весов. Ответ, как видим, один — равновесие не нарушится.

Подумайте, что произошло бы с весами, если бы в стакан с водой опустили палец, не касаясь стенок и дна стакана.

Задача 2. В сосуде с водой плавает стакан, в котором находится небольшой шарик (рис. 2). Как изменится уровень воды, если шарик — один раз деревянный, а другой стальной — переложить из стакана в сосуд?

Сила давления на дно сосуда равна, очевидно, весу воды, стакана и шарика. Если поставить сосуд (который для простоты можно считать невесомым) на весы, то они покажут вес содержимого, причем их показания не изменятся от того, будет ли шарик находиться в стакане или в сосуде с водой. С другой стороны, весы должны показывать силу, действующую на

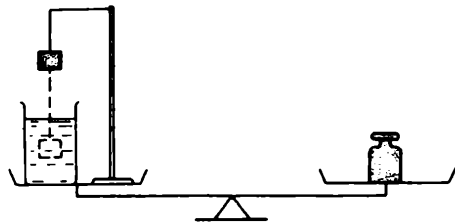


Рис. 1

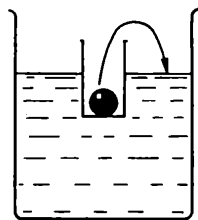


Рис. 2

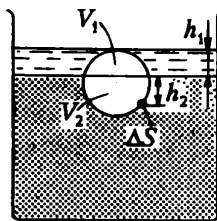


Рис. 3

дно сосуда, которая в начальной ситуации определяется только уровнем воды в сосуде.

В случае, когда из стакана перекалывают деревянный шарик, он будет плавать на поверхности воды, и действующая на дно сосуда сила будет, по-прежнему, определяться лишь уровнем воды. А поскольку эта сила не меняется, уровень воды тоже должен остаться прежним.

Иным будет результат в случае, когда шарик стальной. Такой шарик опустится на дно сосуда, и полная сила давления на дно будет складываться из силы давления воды и силы давления шарика. Полная сила опять-таки не должна измениться, значит, должна уменьшиться сила давления воды. Следовательно, уровень воды в этом случае понизится.

Попробуйте ответить на вопрос: как изменится уровень воды в стакане, где плавает кусок льда с замороженными в него: а) пробкой, б) дробинкой, в) пузырьком воздуха, после того как лед растает?

Задача 3. *Стальной шарик плавает в ртути. Поверх ртути наливают слой воды, покрывающий шарик (рис. 3). Как изменится глубина погружения шарика в ртуть?*

Очевидно, возникает желание воспользоваться непосредственно законом Архимеда. Однако трудность состоит в том, что разные части шарика находятся в разных жидкостях, поэтому шарик в целом рассматривать нельзя. Выберем произвольно малый участок поверхности шарика, находящийся в ртути, и найдем действующую на него силу давления. Ясно, что она будет равна

$$f = (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2) \Delta S,$$

где ρ_1 — плотность воды, ρ_2 — плотность ртути, ΔS — площадь выбранного участка. Представим эту силу в виде

$$f = (\rho_1 g (h_1 + h_2) + (\rho_2 - \rho_1) g h_2) \Delta S = f_1 + f_2.$$

Теперь просуммируем силы давления, действующие на все участки поверхности шарика, соприкасающиеся как со ртутью,

так и с водой, и получим две силы: F_1 и F_2 . Сила $F_1 = \rho_1 g (V_1 + V_2)$ есть выталкивающая сила, действующая на шарик при условии, что он погружен только в воду. Вторая сила $F_2 = (\rho_2 - \rho_1) g V_2$ представляет собой силу выталкивания шарика, как если бы он был погружен до уровня ртути в жидкость плотностью $(\rho_2 - \rho_1)$.

Таким образом, равнодействующая выталкивающая сила равна

$$F = F_1 + F_2 = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2.$$

Мы видим, что она складывается из двух частей: вода выталкивает часть шарика, плавающую в ней, а ртуть, сама по себе, выталкивает часть шарика, погруженную в нее. Имеет место как бы принцип независимости сил выталкивания — каждая жидкость вносит в общую силу свой независимый вклад. Хотя интуитивно (и такие ответы действительно встречаются) могло бы показаться, что ртуть выталкивает шарик, а вода наоборот прижимает его к ртути.

Итак, вода как бы помогает ртути удерживать шарик, он несколько «вылезает» из ртути, и глубина погружения шарика в ртуть уменьшается.

Задача 4. В стакане с водой плавает цилиндрическая деревянная шайба с цилиндрической дыркой. Оси шайбы и дырки параллельны. Площадь дна стакана S , площадь сечения дырки s . Удерживая шайбу на месте, дырку осторожно заполняют маслом, после чего шайбу отпускают. На какую высоту поднимется шайба, если вначале она выступала из воды на величину H ? Плотность масла ρ , плотность воды ρ_0 .

Прежде всего найдем, на какую высоту поднимется уровень воды в стакане после того, как шайбу отпустят. Для этого определим изменение силы давления ΔF_λ на дно сосуда. С одной стороны,

$$\Delta F_\lambda = \rho_0 g \Delta h S,$$

если Δh — изменение уровня воды. С другой стороны, изменение силы давления равно силе тяжести налитого масла:

$$\Delta F_\lambda = \rho g H s.$$

Отсюда получаем

$$\Delta h = \frac{\rho H s}{\rho_0 S}.$$

Выталкивающая сила, действующая на шайбу и уравновешивающая силу тяжести, определяется давлением воды на ее нижнее основание. Поскольку шайба продолжает плавать, по-

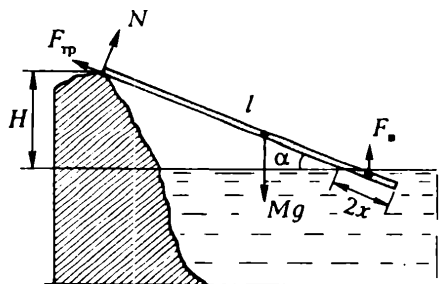


Рис. 4

ложение ее относительно нового уровня воды в стакане должно остаться неизменным. Следовательно, шайба поднимется как раз на величину Δh .

Подумайте, на сколько поднялась бы шайба, если масло налить вне шайбы, ничего не наливая в дырку.

Задача 5. На камень, выступающий над поверхностью воды на высоту H , опирается верхним концом тонкая деревянная доска длиной l , частично погруженная в воду (рис. 4). При каком минимальном коэффициенте трения между камнем и доской доска будет находиться в равновесии? Плотность воды ρ_0 , дерева ρ .

На доску действуют четыре силы. Это сила тяжести $M\vec{g}$, приложенная к центру доски, сила реакции опоры \vec{N} , приложенная к точке касания с камнем и перпендикулярная доске, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, действующая в той же точке, но направленная по касательной к доске, и выталкивающая сила \vec{F}_a .

До сих пор нам было достаточно знать лишь модуль архимедовой силы. Теперь же оказывается необходимым выяснить, где приложена эта сила. Выделим мысленно в жидкости объем произвольной формы. В равновесии действующая на жидкость в этом объеме сила тяжести уравнивается силами гидростатического давления, т. е. выталкивающей силой. Момент силы тяжести относительно центра масс выделенного участка жидкости равен, очевидно, нулю. Значит, должна быть равна нулю и сумма моментов сил давления. Заменяя выделенный объем жидкости твердым телом такой же формы, убеждаемся, что действующие на него со стороны окружающей жидкости силы не изменятся. Отсюда можно заключить, что суммарное действие сил давления эквивалентно действию силы, направленной по вертикали и проходящей через центр масс вытесненного объема жидкости. Подчеркнем, что таким образом мы находим лишь линию действия выталкивающей силы,

но ничего не можем сказать о конкретной точке ее приложения.

Итак, в данном случае выталкивающая сила направлена вертикально вверх и проходит через середину погруженной части доски (через центр масс вытесненного объема воды).

Пусть площадь сечения доски S , длина погруженной части доски $2x$, а угол, который доска составляет с горизонтом (с поверхностью воды), α . Тогда

$$F_{\text{в}} = 2x\rho_0 Sg \text{ и } Mg = \rho l Sg.$$

Поскольку нас интересует минимальное значение коэффициента трения доски о камень, можно считать, что

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Так как доска находится в равновесии, сумма всех действующих на доску сил равна нулю. Запишем это условие, спроектировав все силы на направления касательной к доске и нормали к ней:

$$2x\rho_0 Sg \sin \alpha - \rho l Sg \sin \alpha + \mu N = 0,$$

$$2x\rho_0 Sg \cos \alpha - \rho l Sg \cos \alpha + N = 0.$$

Поделив почленно эти уравнения друг на друга, найдем, что

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha.$$

С другой стороны, как это видно из рисунка 4,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{\sqrt{(l-2x)^2 - H^2}}.$$

Величину x можно найти из условия равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на доску. Удобнее всего рассмотреть моменты сил относительно точки касания доски и камня (точки O), поскольку при этом моменты сил трения и реакции опоры будут равны нулю.

Линия действия архимедовой силы проходит через центр масс погруженной части доски, значит, ее плечо относительно точки O равно $(l-x) \cos \alpha$. Плечо силы тяжести равно $(l/2) \cos \alpha$. Условие равенства нулю суммарного момента сил имеет вид

$$\rho l S \frac{l}{2} \cos \alpha - \rho_0 \cdot 2xS(l-x) \cos \alpha = 0,$$

или

$$x^2 - lx + \frac{\rho l^2}{4\rho_0} = 0.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}} \right)$$

(второй корень следует отбросить, так как он не удовлетворяет условию $2x < l$).

Тогда окончательно получаем

$$\mu = \frac{H}{\sqrt{l^2(1 - \rho/\rho_0) - H^2}}.$$

В условии задачи было сказано, что доска тонкая. Подумайте, как это использовалось при решении.

Заметим, что вопрос о моменте выталкивающей силы исключительно важен при рассмотрении устойчивости плавания тел. В кораблестроении вводится специальное понятие о метациентре — точке пересечения линии действия выталкивающей силы в наклонном положении корабля с плоскостью его симметрии (рис. 5). Метациентр (точка M) не должен опускаться ниже центра тяжести корабля (точка O), иначе вращательный момент архимедовой силы не сможет вернуть корабль в вертикальное положение.

Задача 6. В аквариум прямоугольного сечения налита вода (плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$) до высоты $H = 0,5 \text{ м}$. Определите силу, действующую на стенку аквариума длиной $l = 1 \text{ м}$, и момент сил давления на эту стенку относительно ее нижнего ребра.

В данном случае давление меняется с глубиной погружения h ; причем меняется по линейному закону $p = \rho gh$. Не вызывает сомнения, что равнодействующая всех сил давления

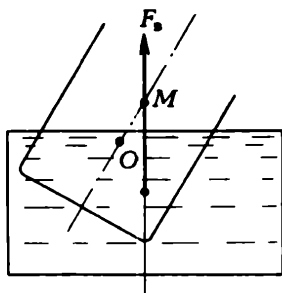


Рис. 5

на стенку направлена горизонтально. А чему равен ее модуль? Обычно при ответе на этот вопрос используют формулу $F = p_{\text{ср}} S$, где $S = lH$ — площадь соприкосновения воды со стенкой, а $p_{\text{ср}} = \rho g H/2$ — среднее давление, равное давлению на середине глубины. И такой ответ, безусловно, верный. Однако не каждый абитуриент может объяснить, почему используется именно это давление в качестве среднего. Попробуем сделать это.

Рассмотрим прямоугольную призму (из материала плотностью ρ) высотой l , в основании которой лежит прямоугольный равнобедренный треугольник со стороной H . Поставим эту призму на горизонтальную поверхность (рис. 6). Нетрудно видеть, что сила давления призмы на поверхность по модулю совпадает с силой давления воды на боковую поверхность аквариума (вследствие одинаковости распределения давлений по поверхности соприкосновения). Но сила давления призмы — это ее вес, поэтому

$$F_1 = \rho g H \frac{H}{2} l = \left(\rho g \frac{H}{2} \right) (lH) = 1250 \text{ Н.}$$

Итак, действительно в качестве среднего давления воды следует взять давление на середине глубины.

Второй вопрос задачи — более сложный, поскольку и давление меняется с глубиной, и плечи соответствующих сил давления также зависят от глубины. Ссылаясь на аналогию с предыдущим результатом, иногда предлагают для нахождения момента сил давления использовать среднюю силу давления и «среднее» плечо, равное $H/2$. Но это совершенно неправильно. Чтобы получить верный ответ, действительно следует воспользоваться аналогией, но аналогией с призмой, упоминавшейся выше. Для нее искомый момент есть произведение силы тяжести на плечо относительно прямой AA' (см. рис. 6). Линия действия силы тяжести находится на расстоянии $H/3$ от

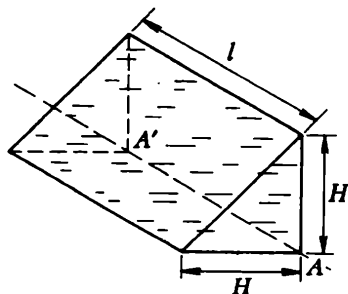


Рис. 6

ребра AA' (в однородном треугольнике центр масс находится в точке пересечения медиан), поэтому момент сил давления на стенку равен

$$M_2 = \rho g \frac{H}{2} l H \frac{H}{3} \approx 208,3 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

При решении задачи мы нигде не учитывали атмосферное давление. Подумайте, может ли оно изменить ответ.

Задача 7. *Что произойдет с глубиной погружения шарика, плавающего в стакане с водой, если стакан начнет с ускорением двигаться вверх?*

Рассмотрим систему «вода — плавающий в ней шарик». Пусть она движется вверх с ускорением a . Это ускорение создается за счет разности сил давления N_a со стороны дна стакана и силы тяжести системы $(M + m)g$, где M — масса воды, а m — масса шарика:

$$N_a - (M + m)g = (M + m)a.$$

Пока система покоилась, сила давления N_0 на дно стакана определялась соотношением

$$N_0 - (M + m)g = 0.$$

Сравнивая силы N_a и N_0 , видим, что

$$\frac{N_a}{N_0} = \frac{a + g}{g}.$$

Покажем, что давление в любой точке жидкости увеличилось в такое же число раз. Выделим «водяной» цилиндр сечением ΔS , одно из оснований которого совпадает с поверхностью воды, а другое находится на глубине h . Запишем уравнение движения этого цилиндра в вертикальном направлении:

$$p_h \Delta S - \rho \Delta S h g = \rho \Delta S h a,$$

где p_h — давление воды на глубине h , ρ — плотность воды. Мы видим, что это давление равно

$$p_h = \rho(g + a)h,$$

т. е. по сравнению со статическим случаем оно возросло в $(g + a)/g$ раз. Следовательно, во столько же раз увеличилась выталкивающая сила.

Запишем теперь уравнение движения шарика по вертикали:

$$\rho V_a g \frac{g + a}{g} - mg = ma.$$

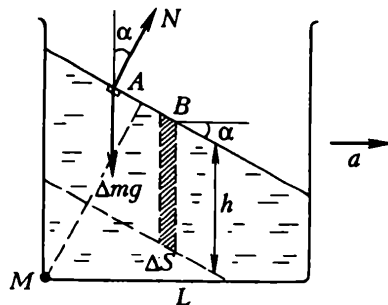


Рис. 7

Отсюда получаем, что объем погруженной части шарика при ускоренном движении стакана вверх равен $V_a = t/\rho$ и не зависит от ускорения системы. Следовательно, глубина погружения шарика в воду не изменится.

Задача 8. Аквариум, имеющий форму куба с ребром L , до половины наполнен водой и приведен в движение с горизонтальным ускорением a ($a < g$). Считая, что к моменту начала движения системы «аквариум — вода» как целого вода не расплескалась, определите форму поверхности воды и давление в точке M (рис. 7).

Сразу же скажем, что поверхность воды будет представлять собой часть плоскости, наклоненной к горизонту под углом α . Теперь обоснуем это и найдем угол α .

Выделим небольшой объем жидкости массой Δm вблизи произвольной точки A поверхности воды. Равнодействующая сил давления со стороны всей остальной воды будет перпендикулярна поверхности в данном месте (почему?). Пусть она равна N и образует угол α с вертикалью. Тогда выделенный участок поверхности (поскольку он мал, его можно считать плоским) образует тот же угол α с горизонтом.

Запишем уравнения движения нашего объема воды, спроектировав все силы и ускорения на вертикальную и горизонтальную оси:

$$\begin{aligned} N \cos \alpha - \Delta mg &= 0, \\ N \sin \alpha &= \Delta ma. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}$$

— угол наклона поверхности не зависит от выбора точки A и определяется только отношением a/g .

Выберем теперь в воде плоскость, параллельную поверхности воды и отстоящую от нее по вертикали на расстояние h . Покажем, что во всех ее точках давление воды p_h будет определяться по формуле $p_h = \rho gh$. Действительно, выделим в воде цилиндр с образующей длиной h и основаниями ΔS (см. рис. 7). По вертикали этот объем не движется, поэтому сумма проекций всех действующих на него сил на вертикальное направление равна нулю:

$$\rho gh \Delta S \cos \alpha - p_h \Delta S \cos \alpha = 0,$$

где первое слагаемое — это сила тяжести цилиндра, а второе — вертикальная проекция силы давления на нижнее основание цилиндра. Отсюда получаем

$$p_h = \rho gh.$$

Таким образом, поверхностями постоянного давления будут плоскости, параллельные свободной поверхности воды.

Для нахождения давления в точке M заметим, что из-за несжимаемости воды точка B (середина) остается на месте. Следовательно,

$$p_M = \rho g \left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2} \operatorname{tg} \alpha \right) = \rho(a + g) \frac{L}{2}.$$

Было ли нами где-нибудь использовано условие $a < g$? Найдите также силы давления воды на стенки и дно аквариума при его ускоренном движении.

Упражнения

1. Ртутный манометр (рис. 8) состоит из двух трубок с площадями сечения S_1 и S_2 , причем $S_1/S_2 = 2$. На сколько изменилось измеряемое давление p , если уровень ртути в левом колене поднялся на $\Delta h = 10$ мм?

2. В бочку с водой упал стеклянный диск. Его диаметр $D = 30$ см, толщина $h = 5$ мм, плотность $\rho = 2,6 \cdot 10^3$ кг/м³. Чтобы достать диск, в бочку опустили трубку диаметром $d = 10$ см, плотно прижали ее к

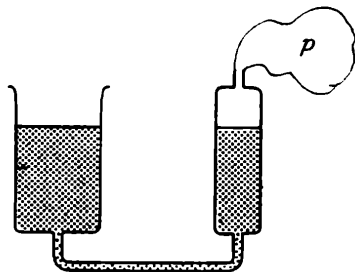


Рис. 8

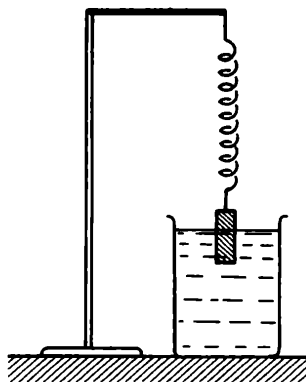


Рис. 9

диску, выкачали из нее воду и стали медленно поднимать вверх. Определите, до какого расстояния до поверхности воды можно таким способом поднять диск.

3. Воронка массой M , имеющая форму усеченного конуса с радиусом основания R , стоит на столе. Края воронки плотно прижаты к поверхности стола. Сколько воды будет налито в воронку к моменту ее отрыва от стола, если высота уровня воды в воронке в этот момент равна h ?

4. Цилиндрическую гирю, подвешенную к динамометру, опускают в воду, пока уровень воды в сосуде не изменится на $\Delta h = 8$ см (рис. 9). Показание динамометра при этом изменилось на $\Delta F = 0,5$ Н. Определите сечение сосуда.

5. В стакане, доверху наполненном водой и закрытом сверху, плавает деревянный шарик. Как изменится сила давления шарика на крышку, если сосуд привести в движение с ускорением, направленным вертикально вверх?

Гармоническим колебательным движением называют движение, происходящее по закону

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Здесь x — смещение тела из положения равновесия, x_0 — амплитуда колебаний, $\omega t + \varphi_0 = \varphi$ — фаза колебаний, ω — циклическая частота, которую можно связать с частотой колебаний ν или периодом колебаний T соотношениями $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, и φ_0 — начальная фаза.

Наибольшую трудность при изучении этих величин вызывает обычно понятие фазы колебаний. Из уравнения (1) видно, что, зная фазу колебаний и амплитуду, можно определить не только положение тела в данный момент времени, но и направление движения тела. Поэтому говорят, что фаза колебаний характеризует стадию колебательного движения в рассматриваемый момент. Начальная фаза показывает, с какой стадии начался колебательный процесс. Пусть, например, математический маятник (рис. 1) колеблется с начальной фазой $\varphi_0 = \pi/2$. Это означает, что он начинает двигаться из положения равновесия влево. Через четверть периода, когда фаза колебаний $\varphi = \omega t + \varphi_0 = \pi$, маятник дойдет до крайнего левого положения и т. д. Особенно важными понятия фазы и начальной фазы ста-

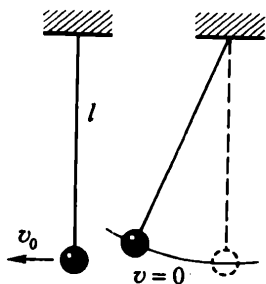


Рис. 1

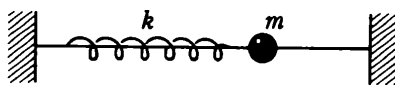


Рис. 2

новятся при сравнении или сложении нескольких колебаний.

Уравнение (1) — это кинематический закон, описывающий гармонические колебания и связывающий основные кинематические величины, характеризующие это движение. А когда возможно такое движение? От чего зависят амплитуда, частота и начальная фаза колебаний? Самые простые и наглядные примеры колебательных систем — это пружинный (рис. 2) и математический маятники. Будем говорить только о свободных (собственных) колебаниях этих маятников (хотя уравнение (1) описывает и вынужденные колебания тоже).

Если каким-нибудь образом вывести маятник из состояния равновесия, сообщив ему некоторую начальную энергию, он будет совершать периодически повторяющиеся движения. Отличительной особенностью колебаний по сравнению с остальными видами периодических движений является то, что существует особое положение — положение равновесия, к которому маятник периодически возвращается, но не останавливается в этом положении, а продолжает двигаться дальше по инерции. Следовательно, в системе, обладающей инертностью, обязательно должна быть так называемая возвращающая сила. В пружинном маятнике это — сила упругости, в математическом — составляющая силы тяжести. Возвращающая сила связана со смещением маятника соотношением

$$F_{\text{в}} = -kx,$$

которое по виду напоминает закон Гука для упругих деформаций. Поэтому $F_{\text{в}}$ часто называют квазиупругой силой (приставка «квази» означает «как бы»), а k — коэффициентом квазиупругости (он зависит от природы возвращающей силы). Таким образом, основной закон динамики — второй закон Ньютона — для гармонических колебаний записывается так:

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x. \quad (2)$$

Решением этого уравнения и является выражение (1).

Начальная фаза φ_0 зависит, конечно, только от начальных условий. Циклическая частота ω определяется параметрами системы m и k , характеризующими инертные и квазиупругие

свойства системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

А вот амплитуда колебаний зависит от той энергии, которую сообщили маятнику в начальный момент. Конкретнее об этом — при решении следующей задачи.

Задача 1. Пружинный маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω и амплитудой x_0 . Найдите максимальные значения ускорения и скорости маятника, а также его механическую энергию.

Поскольку смещение x маятника изменяется по закону

$$x = x_0 \cos \omega t,$$

а скорость и ускорение связаны с соотношениями

$$v = x', \quad a = v' = x'',$$

то скорость и ускорение тоже изменяются по гармоническим законам:

$$v = -\omega x_0 \sin \omega t = v_0 \cos(\omega t + \pi/2),$$

$$a = -\omega^2 x_0 \cos \omega t = -a_0 \cos \omega t.$$

Отсюда следует, что максимальные значения скорости и ускорения равны соответственно

$$v_0 = \omega x_0, \quad a_0 = \omega^2 x_0.$$

Заметим, что колебания скорости опережают по фазе колебания смещения на $\pi/2$, т. е. на четверть периода, а колебания ускорения противоположны по фазе колебаниям смещения.

Графики зависимости смещения, скорости и ускорения маятника изображены на рисунке 3.

Механическая энергия маятника E складывается из кинетической энергии шарика $E_k = mv^2/2$ и потенциальной энергии упру-

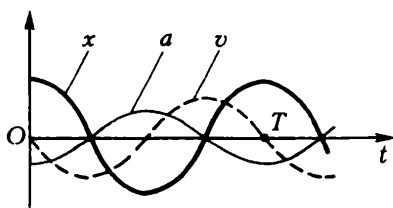


Рис. 3

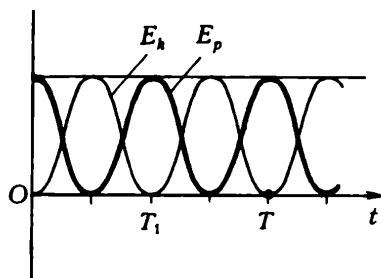


Рис. 4

гой деформации пружины $E_p = kx^2/2$. При прохождении положения равновесия, когда невесомая пружина недеформирована, а скорость шарика максимальна, полная энергия

$$E = E_{k \max} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

В момент наибольшего удаления шарика от положения равновесия, когда его скорость равна нулю, а деформация пружины максимальна, энергия

$$E = E_{p \max} = \frac{kx_0^2}{2}.$$

Очевидно, что полная энергия E маятника с течением времени не меняется (мы рассматриваем незатухающие свободные колебания). А что происходит с E_k и E_p ?

Запишем выражение для потенциальной энергии упругой деформации:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2} \cos^2 \omega t = \frac{kx_0^2}{4} (1 + \cos 2\omega t).$$

Видно, что потенциальная энергия тоже меняется с течением времени по гармоническому закону, но частота ее колебаний в 2 раза больше частоты колебаний смещения маятника. Кинетическую энергию можно представить как разность полной энергии и потенциальной:

$$E_k = E - E_p = \frac{kx_0^2}{4} (1 - \cos 2\omega t).$$

Кинетическая энергия изменяется с той же частотой, что и потенциальная, но в противофазе с ней. Графически это показано на рисунке 4, где T_1 — период колебаний энергии, а T — период колебаний смещения.

Таким образом, рассматривая колебания, можно говорить о периодических изменениях не только смещения, скорости, ускорения, но также и кинетической и потенциальной энергий.

Задача 2. На чашку весов, подвешенную на пружине, падает с высоты h груз массой m и остается на чашке (рис. 5, а). Жесткость пружины k . Массы пружины и чашки малы по сравнению с массой груза. Определите амплитуду и период свободных колебаний чашки с грузом.

Система действительно будет совершать колебания, так как она представляет собой пружинный маятник, расположенный вертикально. Но, кроме силы упругости пружины, на чашку с грузом действует еще сила тяжести. Какова ее роль? Эта сила, оказывается, лишь изменяет положение равновесия системы, смещая его вниз на величину Δx (рис. 5, б).

Рассмотрим две системы координат: OX и O_1X_1 . Запишем закон движения маятника в первой системе:

$$ma = -kx + mg.$$

Но

$$x = x_1 + \Delta x.$$

Величину Δx можно найти из условия равенства сил тяжести и упругости в положении равновесия:

$$mg = k\Delta x.$$

Поэтому

$$ma = -kx_1 - k \frac{mg}{k} + mg = -kx_1,$$

т. е. ускорение грузу в системе O_1X_1 сообщает как бы только сила

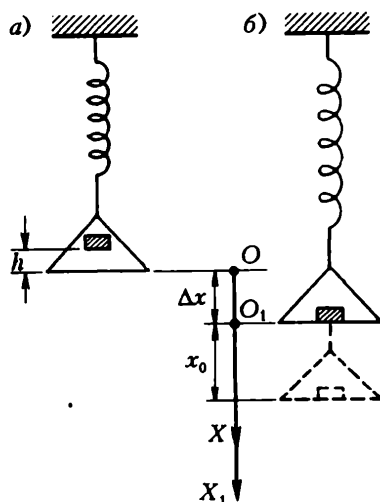


Рис. 5

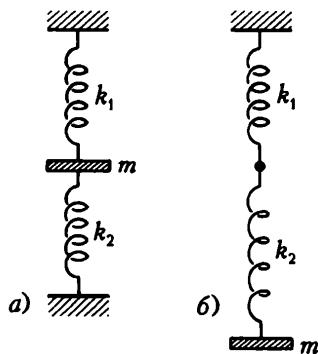


Рис. 6

упругости. В таком случае период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Амплитуду колебаний найдем, исходя из закона сохранения энергии. В начальный момент груз обладает потенциальной энергией тяготения. В момент, когда пружина максимально растянута, потенциальная энергия упругой деформации запасена в пружине (за начало отсчета высот принимаем наименьшее положение чашки с грузом, поэтому во втором случае груз не обладает никакой энергией). Приравняем эти энергии:

$$mg(h + \Delta x + x_0) = \frac{k(\Delta x + x_0)^2}{2},$$

где $\Delta x = mg/k$. Отсюда получаем

$$x_0 = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}.$$

Задача 3. Найдите частоту колебаний маятников, изображенных на рисунке 6. Жесткости пружин k_1 и k_2 , масса груза m . Массами пружин пренебречь.

Рассмотрим сначала первый маятник (рис. 6, а). Если сместить груз из положения равновесия вниз на величину x , то верхняя пружина дополнительно растянется на длину x , а нижняя — сожмется тоже на x . Но обе дополнительные силы упругости направлены вверх, т. е. к положению равновесия, поэтому можно записать:

$$ma = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x.$$

По уравнению движения маятника,

$$a = -\omega^2 x,$$

поэтому

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

Во втором случае (рис. 6, б) при смещении груза из положения равновесия вниз на величину x обе пружины растянутся, но их удлинения x_1 и x_2 будут разными. Однако

$$x_1 + x_2 = x.$$

А вот силы упругости пружин одинаковы (это следует из третьего закона Ньютона и условия невесомости пружин):

$$k_1 x_1 = k_2 x_2.$$

Поэтому закон движения груза будет выглядеть так:

$$ma = -k_1 x_1 = -k_2 x_2 = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x,$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}.$$

Заметим, что частота колебаний первого маятника больше, чем частота колебаний второго (проверьте это самостоятельно).

Задача 4. *Ареометр массой m представляет собой шарик, заполненный дробью, и цилиндрическую трубку с поперечным сечением S . Он помещен в жидкость плотностью ρ (рис. 7). Ареометр погружают в жидкость несколько глубже, чем это нужно для его равновесия, и затем отпускают. Найдите период свободных колебаний ареометра.*

В положении равновесия сила тяжести уравновешивается выталкивающей силой. Если ареометр глубже погружен в жидкость, выталкивающая сила становится больше силы тяжести,

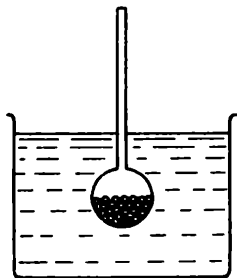


Рис. 7

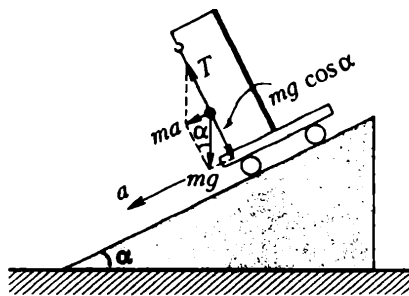


Рис. 8

возникает равнодействующая сила, направленная вверх. Пройдя по инерции положение равновесия, ареометр оказывается погруженным в жидкость меньше, чем это нужно для равновесия, возникает равнодействующая сила, направленная вниз. Таким образом, изменение выталкивающей силы выполняет роль возвращающей силы:

$$\Delta F_{\text{выт}} = -\rho g \Delta V = -\rho g S x$$

(знак «минус» говорит о том, что изменение выталкивающей силы противоположно изменению объема погруженной части ареометра). Следовательно, в этом случае $k = \rho g S$, поэтому

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

Задача 5. Математический маятник длиной l укреплен на тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости с углом наклона α . Найдите положение равновесия маятника и период его колебаний.

Поскольку маятник находится на тележке, скатывающейся с наклонной плоскости с ускорением $a = g \sin \alpha$, то его положением равновесия будет положение, при котором маятник движется относительно плоскости с тем же ускорением a , что и тележка. На шарик действуют две силы: сила тяжести mg и сила натяжения нити T . Равнодействующая \vec{F} этих сил в положении равновесия и должна сообщить шарiku ускорение \vec{a} :

$$F = ma = mg \sin \alpha.$$

Из рисунка 8 видно, что это возможно только в том случае, когда нить маятника перпендикулярна наклонной плоскости.

Итак, составляющая силы тяжести вдоль плоскости, рав-

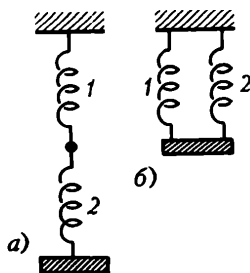


Рис. 9

ная $mg \sin \alpha$, должна обеспечить маятнику ускоренное движение по наклонной плоскости. Сила натяжения, всегда перпендикулярная к траектории движения шарика относительно тележки, тоже не может выступать в роли возвращающей силы. Поэтому остается одна сила — составляющая силы тяжести, перпендикулярная плоскости и равная $mg \cos \alpha$. Можно сказать, что маятник совершает колебания как бы в ином поле тяготения с ускорением свободного падения $g_1 = g \cos \alpha$. Период таких колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \alpha}}.$$

Упражнения

1. Математический маятник, состоящий из нити длиной $l = 243$ см и стального шарика диаметром $d = 4$ см, совершает гармонические колебания с амплитудой $x_0 = 10$ см. Определите скорость шарика при прохождении положения равновесия и наибольшее значение возвращающей силы. Плотность стали $\rho = 7,8$ г/см³.

2. Тело массой M , скрепленное с пружиной, совершает колебания с амплитудой x_0 на гладком горизонтальном столе. В тот момент, когда тело проходит положение равновесия, на него сверху падает и прилипает к нему кусок пластилина массой m . Какой станет амплитуда колебаний?

3. Груз, подвешенный на невесомой пружине, колеблется с частотой $\nu = 0,4$ Гц. Каковы будут частоты колебаний того же груза на двух таких пружинах, если один раз они соединены последовательно, а другой раз параллельно (рис. 9)?

4. Горизонтальная подставка совершает в вертикальном направлении гармонические колебания с амплитудой x_0 . Какой должна быть максимальная частота этих колебаний, чтобы лежащий на подставке предмет не отделялся от нее?

5. Лифт поднимается вверх сначала с ускорением a_1 в течение времени t_1 , затем с ускорением — a_2 в течение времени t_2 . В лифте находится математический маятник длиной l . Сколько колебаний он совершит за время движения?

А. Черноуцан

Проплывая на лодке под мостом А, рассеянный человек уронил в реку шляпу, но, не заметив этого, продолжал грести против течения. Через 15 минут, обнаружив пропажу, он развернул лодку и, гребя в том же темпе, догнал шляпу под мостом В, удаленном от моста А на 1 километр. Какова скорость течения реки?

Отнюдь не случайно разговор о системах отсчета мы начали с этой очень старой и уже ставшей классической задачи. Она наглядно иллюстрирует тот факт, что удачный выбор системы отсчета (СО) существенно упрощает, а иногда и делает просто устным решение многих физических задач.

Действительно, чтобы найти скорость течения в нашем примере, надо узнать, сколько времени заняло движение шляпы между мостами (поскольку скорость шляпы равна скорости воды). Перейдем в СО, связанную со шляпой. В ней вода неподвижна, а скорость движения лодки в обоих направлениях одна и та же. Значит, время движения лодки назад, к шляпе, равно времени движения от шляпы, т. е. 15 минутам. Тогда общее время между потерей и поимкой шляпы 30 минут, и скорость течения $1 \text{ км}/0,5 \text{ ч} = 2 \text{ км}/\text{ч}$.

При переходе из одной СО в другую многие физические величины, описывающие механическое движение тел, например скорость, ускорение и т. п., изменяются. При этом выполняются известные законы сложения соответствующих величин:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{12} + \vec{v}_2, \quad \vec{a}_1 = \vec{a}_{12} + \vec{a}_2.$$

Здесь \vec{v}_1 (\vec{a}_1) — скорость (ускорение) тела 1 относительно неподвижной СО (чаще всего — земли), \vec{v}_{12} (\vec{a}_{12}) — скорость (ускорение) тела 1 относительно тела 2, с которым связана подвижная СО, \vec{v}_2 (\vec{a}_2) — скорость (ускорение) подвижной СО относительно неподвижной.

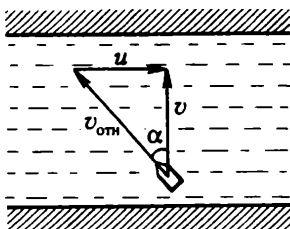


Рис. 1

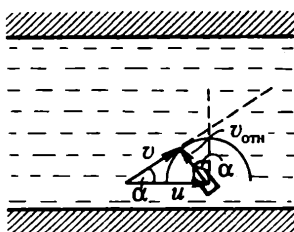


Рис. 2

А теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Сначала — из кинематики. Заметим, что в рамках кинематики все СО (покоящиеся, движущиеся равномерно или ускоренно, вращающиеся и т. д.) равноправны; выбор СО определяется удобством и здравым смыслом. Однако мы ограничимся только поступательно движущимися СО.

Задача 1. *Скорость течения реки \vec{u} , скорость лодки в стоячей воде $\vec{v}_{отн}$. Какой курс должен держать человек в лодке, чтобы течение снесло ее как можно меньше?*

Понятно, что здесь разумно обсуждать две СО. Требование обеспечить наименьший снос имеет отношение к СО, связанной с землей, — угол между скоростью лодки \vec{v} и перпендикуляром к линии берега должен быть минимальным. В СО, связанной с водой, задана величина скорости $v_{отн}$ лодки и требуется найти направление этой скорости, например — угол α между скоростью и перпендикуляром к линии берега. Ведь «держат курс» означает задавать направление корпуса лодки, а оно совпадает с направлением скорости лодки в той СО, где вода неподвижна.

В условии задачи ничего не сказано о соотношении величин u и $v_{отн}$. Рассмотрим два варианта.

1) $v_{отн} > u$. В этом случае удастся обеспечить движение лодки перпендикулярно берегу (сноса нет вовсе). Запишем закон сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{u}$$

и изобразим его на рисунке 1. Из прямоугольного треугольника получаем

$$\sin \alpha = \frac{u}{v_{отн}}.$$

2) $v_{отн} < u$. Равенство, выражающее закон сложения скоростей для этого случая, изображено на рисунке 2. При изменении курса конец вектора $\vec{v}_{отн}$ описывает полуокружность. Минимальный угол между вектором \vec{v} и перпендикуляром к линии берега соответствует условию, что этот вектор касается полу-

окружности. Отсюда получаем

$$\sin \alpha = \frac{v_{\text{отн}}}{u}.$$

Итак, при $v_{\text{отн}} > u \sin \alpha = u/v_{\text{отн}}$; при $v_{\text{отн}} < u \sin \alpha = v_{\text{отн}}/u$.

Задача 2. Из двух точек, расположенных на одной высоте h над землей на расстоянии l друг от друга, одновременно бросают два камня: один вертикально вверх со скоростью v_1 , другой горизонтально со скоростью v_2 . Каково минимальное расстояние между камнями в процессе движения? Начальные скорости камней лежат в одной вертикальной плоскости.

При рассмотрении свободного падения нескольких тел удобно использовать СО, связанную с одним из этих тел. В ней все остальные тела будут двигаться прямолинейно и равномерно (сопротивление воздуха мы не учитываем). Этот прием часто называют «методом барона Мюнхгаузена» (вы поняли — почему?). Воспользуемся им.

Выберем СО, связанную с первым камнем. Тогда движение второго камня будет прямолинейным и равномерным ($\vec{a}_{21} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{g} - \vec{g} = 0$) со скоростью

$$\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Наименьшее расстояние между камнями легко найти из рисунка 3:

$$d = l \sin \alpha = \frac{lv_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Заметим, что наибольшее сближение камней произойдет через время

$$t = \frac{l \cos \alpha}{v_{\text{отн}}} = \frac{l \cos \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{lv_2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

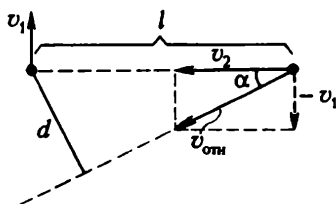


Рис. 3

Необходимо, чтобы к этому моменту первый камень не упал на землю, т. е. должно выполняться условие

$$\frac{lv_2}{v_1^2 + v_2^2} \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Возникает такой вопрос: минимальное расстояние между камнями найдено нами в СО, связанной с летящим камнем; может быть, в СО, связанной с землей, ответ будет другим? Нет, это не так. Расстояние между двумя движущимися точками относится к так называемым инвариантным величинам, т. е. величинам, значение которых не изменяется при переходе из одной СО в другую. Вот примеры других инвариантных в классической механике величин: интервал времени между событиями, размеры предметов, их ориентация в пространстве и т. д.

Перейдем теперь к задачам динамики. Здесь круг «разрешенных» СО резко сокращается. Так как правила действий в неинерциальных СО выходят за рамки школьного курса, мы вынуждены ограничиться только инерциальными СО. В любой из них мы можем пользоваться привычными для нас законами Ньютона и законами сохранения энергии и импульса.

Задача 3. *Тележка массой M и длиной l стоит на гладкой горизонтальной плоскости. На тележке находятся два человека, массы которых m_1 и m_2 . На какое расстояние переместится тележка, если эти два человека поменяются местами?*

С одной стороны, нас интересует перемещение тележки относительно земли; с другой — нам известны конечные перемещения людей не относительно земли, а относительно тележки. Как же быть?

Будем считать, что движения всех тел — и людей, и тележки — равномерные, и перейдем в СО, скорость которой равна скорости тележки v_T в некоторый момент времени. Относительно этой СО начальная скорость всех тел равна $-v_T$. Запишем для замкнутой системы «тележка — люди» закон сохранения импульса:

$$-v_T(m_1 + m_2 + M) = v_{1\text{отн}}m_1 + v_{2\text{отн}}m_2.$$

Домножив это уравнение на Δt , найдем связь между соответствующими перемещениями:

$$s_T(m_1 + m_2 + M) = -s_{1\text{отн}}m_1 - s_{2\text{отн}}m_2.$$

Очевидно, такая же связь будет и между полными перемещениями за время движения. Учитывая, что $s_{1\text{отн}} = l$ и $s_{2\text{отн}} = -l$,

получаем

$$s_{\tau} = \frac{m_2 l - m_1 l}{m_1 + m_2 + M} = l \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M}.$$

Эта задача легко решается также и в СО, связанной с центром масс системы (убедитесь в этом самостоятельно). Напомним, что координаты и скорость центра масс находятся по формулам

$$x_{\text{ц}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

$$\vec{v}_{\text{ц}} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Из второго равенства видно, что, если система тел замкнута, скорость центра масс остается постоянной. Поэтому СО, связанная с центром масс замкнутой системы, является инерциальной. Полный импульс системы тел в этой СО в любой момент равен нулю.

Вспользуемся СО, связанной с центром масс, для решения следующей задачи.

Задача 4. По гладкой горизонтальной плоскости движутся два маленьких тела, связанные невесомой и нерастяжимой нитью длиной l . В некоторый момент времени тело массой m_1 покоится, а тело массой m_2 имеет скорость \vec{v} , направленную перпендикулярно нити (рис. 4). Найдите натяжение нити в этот момент.

Центр масс данной системы тел находится на нити на расстоянии $R_1 = m_2 l / (m_1 + m_2)$ от первого тела и движется относительно плоскости со скоростью $v_{\text{ц}} = m_2 v / (m_1 + m_2)$. Выберем СО, в которой центр масс покоится. В ней тела m_1 и m_2 совершают равно-

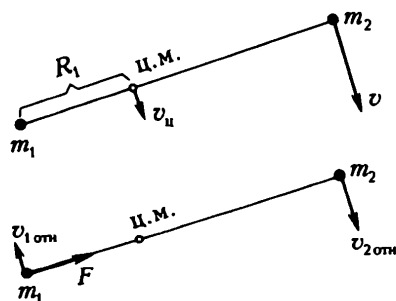


Рис. 4

мерные движения по окружностям вокруг неподвижного центра масс, при этом скорость первого тела равна по величине $v_{ц}$.

Согласно второму закону Ньютона, сила натяжения нити, действующая на первое тело, равна

$$F = m_1 \frac{v_{ц}^2}{R_1},$$

откуда, подставляя выражения для R_1 и $v_{ц}$, находим окончательно

$$F = \frac{m_1 m_2 v^2}{(m_1 + m_2)l}.$$

Во многих случаях при переходе в СО, связанную с центром масс, решение задачи настолько упрощается, что имеет смысл сначала перевести все данные задачи в эту СО и получить результат, а потом вернуться в исходную СО. В качестве примера рассмотрим две задачи об абсолютно упругом ударе шаров.

Задача 5. Два шара с массами m_1 и m_2 , движущиеся со скоростями v_1 и v_2 соответственно, испытывают абсолютно упругий лобовой удар. Каковы будут скорости шаров после удара?

В СО, связанной с центром масс, полный импульс шаров равен нулю как до, так и после удара. Легко догадаться, что оба закона сохранения — импульса и энергии — будут выполняться, если просто поменять направления скоростей шаров на противоположные.

Начальные скорости шаров в СО центра масс равны

$$u_1 = v_1 - v_{ц} = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{m_1(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2},$$

а конечные скорости равны

$$u'_1 = -u_1, \quad u'_2 = -u_2.$$

Тогда конечные скорости шаров относительно земли есть

$$v'_1 = u'_1 + v_{ц} = -\frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

$$v'_2 = u'_2 + v_{ц} = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

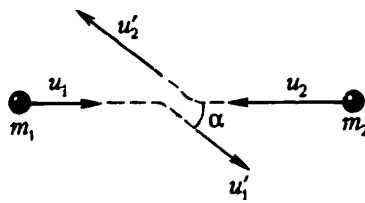


Рис. 5

Задача 6. Шар массой m_1 налетает со скоростью v_1 на покоящийся шар массой m_2 ($m_2 < m_1$). На какой максимальный угол может отклониться шар m_1 при ударе? Шары абсолютно упругие и гладкие.

В СО центра масс (рис. 5) шары сближаются со скоростями

$$\bar{u}_1 = \bar{v}_1 - \bar{v}_u = \bar{v}_1 - \frac{m_1 \bar{v}_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 \bar{v}_1}{m_1 + m_2},$$

$$\bar{u}_2 = -\frac{m_1 \bar{v}_1}{m_1 + m_2},$$

при этом

$$m_1 \bar{u}_1 = -m_2 \bar{u}_2.$$

В результате нецентрального удара скорости шаров сохраняют прежние значения и опять будут направлены противоположно друг другу:

$$u'_1 = u_1, \quad u'_2 = u_2, \quad m_1 \bar{u}'_1 = -m_2 \bar{u}'_2.$$

Однако вектор конечной скорости первого шара \bar{u}'_1 будет повернут относительно вектора его начальной скорости на некоторый угол α . В зависимости от взаимного расположения шаров в момент удара этот угол может изменяться от нуля (легкое касание шаров) до 180° (лобовой удар). Возможные положения конца вектора \bar{u}'_1 лежат на окружности радиусом u'_1 (рис. 6). Конечная скорость первого шара относительно земли равна $\bar{v}'_1 = \bar{u}'_1 + \bar{v}_u$. Максимальный угол между векторами \bar{v}'_1 и \bar{v}_u получается в том случае, когда вектор \bar{v}'_1 касается окружности. Отсюда находим

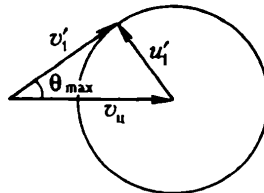


Рис. 6

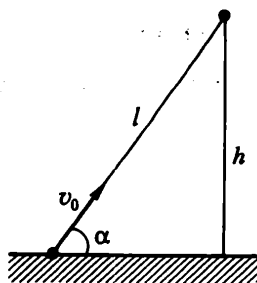


Рис. 7

искомый угол θ_{\max} :

$$\sin \theta_{\max} = \frac{u_1}{v_{11}} = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2} : \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

$$\theta_{\max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}.$$

Упражнения

1. В тот момент, когда начинается свободное падение тела, человек бросает камень, стремясь попасть в падающее тело. Какой должна быть для этого начальная скорость камня (угол с горизонтом и модуль), если тело перед падением находилось на высоте h и на расстоянии l от человека (рис. 7)?

2. Маленький грузик подвешен на нити длиной l . С какой скоростью надо перемещать точку подвеса в горизонтальном направлении, чтобы грузик совершил полный оборот?

3. Притягиваясь по закону всемирного тяготения, две звезды движутся по круговым орбитам, оставаясь все время на расстоянии l друг от друга. Найдите период вращения такой двойной звезды, если ее масса M .

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СВЯЗИ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

А. Черноуцан

В задачах по механике часто встречается ситуация, когда движение тел не является свободным. Ограничения могут создавать твердые поверхности, нерастяжимые нити, жесткие стержни и т. п. В простейших случаях мы учитываем подобные ограничения автоматически, часто даже не оговаривая их существования. Например, ускорение тела на плоскости мы направляем вдоль плоскости (учитывая наличие твердой поверхности), скорости буксира и баржи считаем одинаковыми (принимая во внимание присутствие нерастяжимого троса) и т. д. Однако иногда возникает необходимость выразить эти ограничения в виде специального уравнения, которое мы будем называть «кинематической связью». Начнем с такой задачи.

Задача 1. Найдите ускорения призмы массой m_1 и куба массой m_2 , изображенных на рисунке 1, а. Трением пренебречь.

Запишем второй закон Ньютона для каждого тела (в проекции на направление, совпадающее с соответствующим ускорением):

$$m_1 g - N \sin \alpha = m_1 a_1, \quad (1)$$

$$N \cos \alpha = m_2 a_2. \quad (2)$$

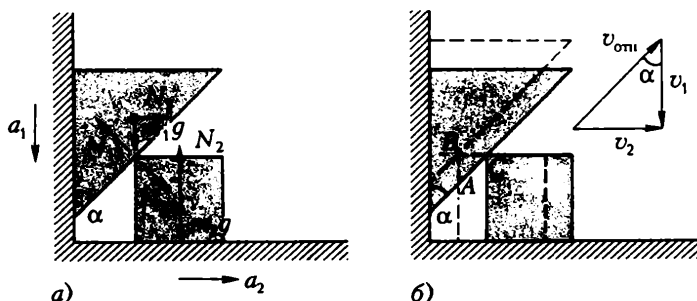


Рис. 1

Мы учли, что по третьему закону Ньютона $\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21}$, т. е. $N_{12} = N_{21} = N$. Написанные два уравнения содержат три неизвестных. Третье уравнение — кинематическая связь между a_1 и a_2 — должно отразить тот факт, что куб и призма остаются все время в контакте друг с другом. Это можно сделать несколькими способами.

1) Рассмотрим два близких положения системы, разделенные промежутком времени Δt (рис. 1, б). В треугольнике ABC сторона AB равна перемещению призмы Δx_1 , а сторона BC — перемещению куба Δx_2 . Имеем

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Разделив обе части равенства на Δt , получаем

$$v_2 = v_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Так как это соотношение справедливо для произвольного момента времени, из него следует искомое соотношение

$$a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Такой метод получения кинематической связи будем называть прямым.

2) Другой способ основан на переходе в такую систему отсчета, где условие контакта становится тривиальным. В системе отсчета, связанной с призмой (см. рис. 1, б), скорость куба $\vec{v}_{\text{отн}}$ направлена вдоль ее поверхности, т. е. под углом α к вертикали. Записывая закон сложения скоростей

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_1,$$

из соответствующего векторного треугольника получаем

$$v_2 = v_1 \operatorname{tg} \alpha, \quad a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Решаем совместно уравнения (1) — (3) и находим

$$a_1 = g \frac{m_1}{m_1 + m_2 \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$a_2 = g \frac{m_1 \operatorname{tg} \alpha}{m_1 + m_2 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

В этой задаче второй метод выглядит несколько искусственно. Однако в некоторых случаях именно правильный выбор системы отсчета позволяет существенно упростить проблему кинематических связей. Вот — пример.

Задача 2. Клин высотой h с углом наклона α стоит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 2). Масса клина m_1 . С вер-

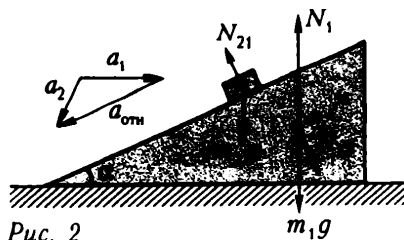


Рис. 2

шины клина начинает соскальзывать без трения брусок массой m_2 . Найдите ускорение клина и время соскальзывания бруска.

Начнем со второго закона Ньютона. Запишем его для клина в проекции на горизонтальное направление, а для бруска — пока что в векторной форме:

$$N \sin \alpha = m_1 a_1, \quad (4)$$

$$\vec{N}_{21} + m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a}_2. \quad (5)$$

Как и раньше, $\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21}$, $N_{12} = N_{21} = N$. Выбор направления осей для бруска связан с решением вопроса о кинематической связи.

Кинематическая связь между ускорениями должна отразить тот факт, что в процессе движения брусок все время остается на поверхности клина. Записать это в виде прямого уравнения оказывается непросто. Вместо этого перейдем в систему отсчета, связанную с клином. В этой системе скорость бруска $\vec{v}_{отн}$ и его ускорение $\vec{a}_{отн}$ направлены вдоль клина. Тогда из закона сложения скоростей $\vec{v}_2 = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_1$ получаем закон сложения ускорений (см. рис. 2)

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_1. \quad (6)$$

Отсюда видно, что от неизвестных a_1 и a_2 удобнее перейти к неизвестным a_1 и $a_{отн}$, решив тем самым проблему кинематической связи. Подставляя равенство (6) в уравнение (5) и проектируя это уравнение на направления вдоль поверхности клина и перпендикулярно к ней, получаем

$$m_2 g \sin \alpha = m_2 (a_{отн} - a_1 \cos \alpha), \quad (5')$$

$$N - m_2 g \cos \alpha = -m_2 a_1 \sin \alpha. \quad (5'')$$

Из уравнений (4), (5') и (5'') находим

$$a_1 = g \frac{m_2 \sin \alpha \cos \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}, \quad a_{отн} = g \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha}.$$

Для ответа на второй вопрос задачи нам не надо искать a_2 , так как время соскальзывания выражается как раз через $a_{\text{отн}}$:

$$\frac{a_{\text{отн}} t^2}{2} = \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Отсюда

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_{\text{отн}} \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2h(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha)}{(m_1 + m_2)g \sin^2 \alpha}}.$$

Как уже говорилось, ограничение на движение может определяться не только прямым контактом рассматриваемых тел, но и наличием в системе соединительных элементов — стержней, нитей и т. п. В большинстве случаев, даже если в условии это не оговорено, соединительные элементы считаются идеальными, т. е. нити — невесомыми и нерастяжимыми, стержни — невесомыми и абсолютно жесткими, для блоков кроме невесомости предполагается также отсутствие трения на оси. (На самом деле слово «невесомый» означает, что масса данного элемента пренебрежимо мала по сравнению с массами других тел системы, слово «нерастяжимый» — что удлинение элемента мало по сравнению с перемещениями тел системы и т. д.) Перед тем как разбирать конкретные примеры, выясним, что следует из идеальности соединительных элементов. Рассмотрим три частных случая.

1) *Невесомость нити.* Напишем второй закон Ньютона для участка нити массой Δm_n (рис. 3, а):

$$T_1 - T_2 = \Delta m_n a.$$

Так как $\Delta m_n = 0$, то $T_1 = T_2$, т. е. сила натяжения не меняется вдоль нити.

2) *Невесомость подвижного блока и отсутствие трения на его оси.* Для раскручивания невесомого блока, в котором нет трения, не нужен вращательный момент. Из этого следует, что натяжение одной и той же нити по обе стороны блока одинаково (рис. 3, б), кроме того, $T_2 - 2T_1 = 0$, т. е. $T_2 = 2T_1$.

3) *Невесомость стержня.* Это условие означает, что сумма сил и сумма моментов сил, действующих на стержень, равны нулю. Например, если к стержню приложены две силы, то они равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль стержня (рис. 3, в). (В отличие от нити, стержень может быть не только в растянутом, но и в сжатом состоянии.)

Нерастяжимость и жесткость нитей и стержней приводит к появлению кинематических связей, которые мы разберем отдельно в следующих задачах.

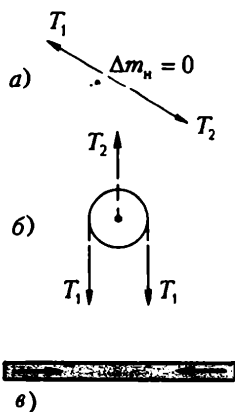


Рис. 3

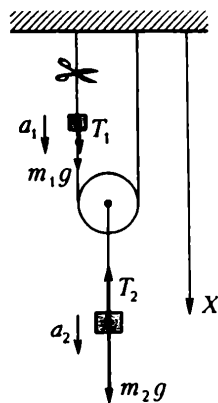


Рис. 4

Задача 3. Найдите ускорения грузов массой m_1 и m_2 после перерезания верхней нити (рис. 4). Нити и блок считайте идеальными.

Выберем положительное направление оси вертикально вниз и запишем второй закон Ньютона для обоих тел:

$$T + m_1 g = m_1 a_1, \quad (7)$$

$$m_2 g - 2T = m_2 a_2 \quad (8)$$

(мы учли свойства блока и нити, описанные выше).

Для нахождения кинематической связи между a_1 и a_2 применим, как мы его назвали, прямой метод. Запишем длину нити в виде

$$l = x_2 + \pi R + (x_2 - x_1),$$

где x_1 — координата груза массой m_1 , x_2 — координата центра блока, R — его радиус, и учтем, что длина нити при движении грузов не изменяется. Тогда для перемещений грузов получим соотношение

$$2\Delta x_2 - \Delta x_1 = 0,$$

откуда

$$2v_2 - v_1 = 0,$$

$$2a_2 - a_1 = 0. \quad (9)$$

Решая уравнения (7) — (9) совместно, находим

$$a_1 = 2a_2 = g \frac{2(m_2 + 2m_1)}{m_2 + 4m_1}.$$

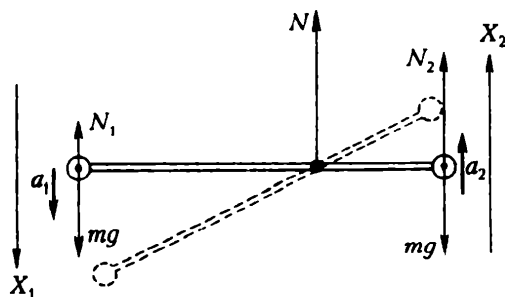


Рис. 5

(Обратите внимание на то, что $a_1 > g$. Подумайте, почему получился такой ответ.)

Задача 4. Невесомый стержень с одинаковыми грузами массой m на концах шарнирно закреплен на оси, которая делит его длину в отношении 2:1 (рис. 5). Стержень удерживают в горизонтальном положении и в некоторый момент освобождают. Найдите ускорения грузов сразу после этого, а также давление стержня на ось в этот момент.

Запишем второй закон Ньютона для грузов, выбрав положительные направления осей в сторону соответствующих ускорений:

$$mg - N_1 = ma_1, \quad (10)$$

$$N_2 - mg = ma_2, \quad (11)$$

где N_1 и N_2 — силы, действующие на грузы со стороны стержня. Так как сумма моментов сил, действующих на невесомый стержень, равна нулю, то

$$N_1 \cdot \frac{2}{3} l - N_2 \cdot \frac{1}{3} l = 0,$$

где l — длина стержня. Отсюда

$$N_2 = 2N_1. \quad (12)$$

Осталось записать кинематическую связь между a_1 и a_2 . Для этого изобразим на рисунке 5 положение стержня через малый промежуток времени Δt после начала движения. Из подобия получаем

$$x_1 = 2x_2,$$

откуда

$$v_1 = 2v_2,$$

$$a_1 = 2a_2. \quad (13)$$

Решая совместно уравнения (10) — (13), находим

$$a_1 = 2a_2 = \frac{2}{5} g,$$

$$N_2 = 2N_1 = \frac{6}{5} mg.$$

Так как сумма сил, действующих на невесомый стержень, равна нулю, то сила реакции оси (равная по модулю силе давления на ось) равна

$$N = N_1 + N_2 = \frac{9}{5} mg.$$

Во многих задачах, рассчитанных на применение закона сохранения энергии, требуется найти скорости тел к определенному моменту времени. В этом случае надо установить кинематические связи не между ускорениями, а между скоростями тел. При решении таких задач полезно использовать тот факт, что полная работа, совершаемая любым идеальным соединительным элементом, равна нулю. Физическая причина этого состоит в том, что в таком элементе не может запасаться никакая энергия — ни кинетическая (его масса равна нулю), ни потенциальная (элемент не деформируется).

Последнее утверждение требует пояснения. Может показаться, что даже при малой деформации очень жесткого стержня (или другого элемента) потенциальная энергия его деформации $kx^2/2$ может быть велика — ведь она пропорциональна жесткости стержня k . Но если учесть, что сила $F = kx$, возникающая при деформации, остается конечной при $k \rightarrow \infty$ (она определяется движением тел, закрепленных на стержне), то потенциальная энергия $F^2/(2k)$ при больших k оказывается очень малой.

Задача 5. Груз массой M сначала удерживают на уровне блоков, а затем освобождают (рис. 6). Считая нити и блоки

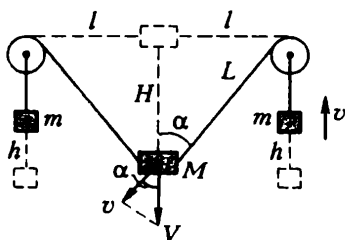


Рис. 6

идеальными, размеры блоков малыми по сравнению с расстоянием $2l$ между ними, а массу m грузиков, висящих на концах нитей, известной, найдите скорость груза в тот момент, когда нити составляют угол α с вертикалью. Полученный ответ исследуйте.

Эта задача по своему уровню несколько выходит за пределы задач, предлагаемых обычно на вступительных экзаменах в вузы. Однако знакомство с ней для абитуриентов окажется небесполезным.

К рассматриваемому моменту груз массой M опустился на $H = l \operatorname{ctg} \alpha$, а грузики массой m поднялись на $h = l/\sin \alpha - l$ каждый. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{MV^2}{2} + 2 \frac{mv^2}{2} - MgH + 2mgh = 0. \quad (14)$$

Для того чтобы найти связь между v и V , можно, например, применить прямой метод. Из рисунка 6 имеем

$$l^2 + H^2 = L^2.$$

Дифференцируя по времени (и учитывая, что $l' = 0$), находим

$$2H \cdot H' = 2L \cdot L'.$$

Так как $L' = v$, $H' = V$, $H/L = \cos \alpha$, то получаем искомую связь:

$$v = V \cos \alpha. \quad (15)$$

Однако проще получить это соотношение из следующих соображений. Раз расстояние L от груза массой M до блока в рассматриваемый момент увеличивается со скоростью v (с такой скоростью вытягивается нить), то проекция скорости V этого груза на направление нити должна быть равна v . Учитывая, что скорость V направлена вертикально, получаем уравнение (15).

Из уравнений (14) и (15) находим

$$V = \sqrt{2gl \frac{M \cos \alpha + 2m(\sin \alpha - 1)}{(M + 2m \cos^2 \alpha) \sin \alpha}}.$$

Выясним, будет ли центральный груз все время опускаться (мы считаем нити очень длинными) или при каком-то α он остановится и начнет подниматься. Уравнение $V = 0$ (условие остановки) преобразуется к виду

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2m - M}{2m + M},$$

т. е. остановка и обратное движение грузов происходят только при $M < 2m$. Если $M > 2m$, то центральный груз будет все время перевешивать и его скорость будет неограниченно возрастать ($V \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$ — проверьте это сами). Если же $M = 2m$, то при опускании центрального груза система все ближе подходит к равновесию, ускорения грузов стремятся к нулю, а их скорости — к предельному значению $V_{\infty} = \sqrt{gl}$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Хотелось бы обратить внимание на то, что при использовании закона сохранения энергии сила натяжения нити вообще не вошла в расчеты.

Последний пример иллюстрирует методы получения кинематических связей для твердых стержней (или других твердых связей). Напомним, что при движении твердого тела расстояние между любыми двумя его точками не изменяется.

Задача 6. *Невесомый стержень длиной l с двумя грузами, каждый массой m , на концах соскальзывает по сторонам прямого двугранного угла, одна сторона которого горизонтальная, а другая — вертикальная. Найдите скорости грузов в тот момент, когда стержень составляет с горизонтом угол α . В начальный момент стержень находился в вертикальном положении и грузы касались стенок угла. Трением при движении пренебrecь.*

Заметим, что эта задача, как и предыдущая, несколько выходит за рамки задач, предлагаемых обычно на вступительных экзаменах.

Пусть в интересующий нас момент верхний (второй) груз находится на высоте

$$y = l \sin \alpha.$$

Тогда из закона сохранения энергии получаем

$$mg(l - y) = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}. \quad (16)$$

Для нахождения кинематической связи можно применить прямой метод, как это было сделано в предыдущей задаче (проделайте это сами). Однако быстрее и нагляднее кинематическая связь получается из таких соображений. Раз расстояние между грузами остается неизменным, то в каждый момент скорость, с которой нижний (первый) груз «удаляется» от верхнего (второго), равна скорости, с которой второй груз «приближается» к первому. Иначе говоря, проекции скоростей грузов на стержень в любой момент времени одинаковы:

$$v_1 \cos \alpha = v_2 \sin \alpha. \quad (17)$$

Из равенств (16) и (17) находим искомые скорости грузов:

$$v_1 = \sqrt{2gl \sin^2 \alpha (1 - \sin \alpha)}$$

и

$$v_2 = \sqrt{2gl \cos^2 \alpha (1 - \sin \alpha)}.$$

В кинематике твердого тела часто используется «разложение» сложного движения на поступательное и вращательное. Чтобы продемонстрировать этот метод, применим его для получения кинематической связи (17).

В системе отсчета, связанной с первым грузом, стержень совершает чисто вращательное движение. Значит, в этой системе скорость второго груза $\vec{v}_{\text{отн}}$ направлена перпендикулярно стержню. Используя закон сложения скоростей

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_1,$$

и получаем соотношение (17).

Может показаться, что найденные выражения для скоростей грузов дают полное решение задачи. Однако здесь имеется поучительный подвох.

Решение было бы полным, если бы второй (верхний) груз не мог оторваться от вертикальной стенки. (Для этого можно было бы, например, насадить грузы на гладкие штанги, а стержень присоединить к ним шарнирно.) В нашем же варианте задачи при некотором угле произойдет отрыв второго груза от вертикальной стены, после чего найденный ответ будет неприменим. Дело в том, что горизонтальный импульс системы определяется только движением первого груза, скорость которого, в соответствии с выражением для v_1 , до некоторого угла возрастает, а потом начинает убывать. Это означает, что в какой-то момент должна изменить направление внешняя горизонтальная сила, действующая на систему. Но есть только одна горизонтальная сила — сила реакции вертикальной стенки, которая при всем желании не может изменить свое направление. Таким образом, в тот момент, когда реакция стенки обратится в ноль, произойдет отрыв второго груза от стенки. Дифференцируя выражение для v_1 по времени, находим, что скорость v_1 максимальна при $\sin \alpha = 2/3$. Следовательно, при угле $\alpha = \arcsin (2/3)$ стержень оторвется от вертикальной стенки.

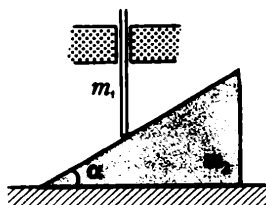


Рис. 7

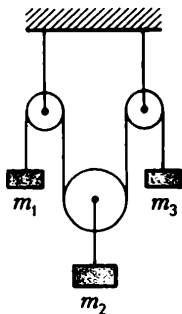


Рис. 8

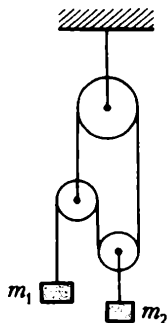


Рис. 9

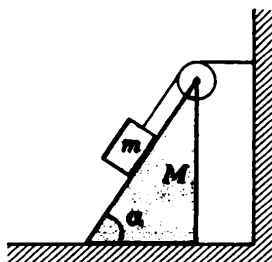


Рис. 10

Упражнения

1. Найдите ускорения стержня и клина, изображенных на рисунке 7. Трения нет.
2. Найдите натяжение нити в системе, изображенной на рисунке 8.
- 3 (для любителей каверз и ловушек). Чему равны ускорения грузов в системе, изображенной на рисунке 9?
4. Найдите ускорение клина на рисунке 10. Трения нет. *Указание.* Примените метод, использованный при решении задачи 2 в статье.

Кинематика

$$1. \tau = \frac{\sqrt{2h} - \sqrt{2(h-l)}}{g}, \text{ где } l = 1 \text{ м.}$$

$$2. v_0 = g \sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{\tau^2}{4}}.$$

$$3. v_0 = \sqrt{\frac{gh \cos \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha \cos \beta \sin (\beta - \alpha)}}.$$

4. Концентрические окружности.

$$5. t = \frac{l}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}}.$$

Динамика материальной точки

$$1. F_1 = m(g + v^2/(2L)) \approx 9,6 \cdot 10^6 \text{ Н.}$$

2. Натяжение нити не изменится.

$$3. \Delta F_1 = Qv \sin \alpha = 500 \text{ Н.}$$

$$4. t = \sqrt{\frac{Z}{g} \frac{4m_1 + m_2}{m_2 - 2m_1(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}} \approx 5 \text{ с.}$$

Силы трения и движение

$$1. F_{\text{тр}} \leq mg \sin \alpha \text{ при } \alpha \leq \operatorname{arctg} \mu;$$

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha \text{ при } \alpha > \operatorname{arctg} \mu.$$

$$2. a_{\text{max}} = \mu g; \text{ сила трения направлена так же, как и ускорение.}$$

$$3. N = \mu mv / \eta \approx 83 \text{ кВт.}$$

4. Выгоднее затормозить.

Криволинейное движение

1. $\beta = \arccos \frac{2}{9} = 77^\circ$; $h_{\max} = \frac{23}{27} R$.

2. $r = \frac{(v \cos \alpha \pm \omega R)^2}{g + \omega^2 R}$ (знак «+» в числителе соответствует закручиванию диска по часовой стрелке, а знак «—» — против часовой стрелки).

3. $v_{\max} \approx 17$ м/с; $P \approx 17$ кВт.

Статика

1. $\mu \geq \operatorname{tg}(\alpha/2) = 0,27$.

2. $h_{\max} = 2r \operatorname{ctg} \alpha$.

3. $F_{\min} = mg \frac{\sqrt{h(2r-h)}}{r-h}$.

4. $\mu_{\min} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$.

Закон всемирного тяготения

1. $h = R_3$.

2. $\frac{M_{\text{Ю}}}{M_3} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \approx 320$.

3. $v_{\min} = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{g R_3^2 / R}$, направление этой скорости совпадает с направлением движения спутника по орбите.

Законы Кеплера и школьная физика

1. $T \approx 89$ мин.

2. Да, может.

3. В 2009 году.

Импульс. Закон сохранения импульса

1. $v_1 = v + 2u$.

2. $\alpha = 1 - \frac{u^2}{v^2} - \frac{m}{M} \left(1 - \frac{u}{v}\right)^2$.

3. $v_{\max} \approx 1500$ м/с (один осколок летит в направлении полета

снаряда, остальные — в противоположную сторону).

4. Вертикальная проекция скорости шарика не изменится:
 $v_v = v \sin \alpha$, горизонтальная проекция будет равна

$$v_r = \frac{v(M-m)\cos \alpha}{M+m}.$$

$$5. u = v \frac{m \cos \alpha}{M+m}.$$

$$6. F = (mv \sin \alpha) / \tau.$$

$$7. F = m \nu n = 80 \text{ Н}.$$

8. Скорость большего шарика в $\sqrt{2}$ раз больше скорости меньшего.

Законы сохранения в механике

$$1. Q = mgH + \frac{mMv^2}{2(M+m)}.$$

$$2. \Delta E = \frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha)}{2(m_1 + m_2)}.$$

$$3. x_{\max} = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}.$$

$$4. H_{\max} = \frac{Mv^2}{2g(M+m)}.$$

$$5. v_{\max} = \sqrt{\frac{2m^2 gl(1 - \cos \alpha)}{M(M+m)}}.$$

Изменение механической энергии

$$1. l = h/\mu - b.$$

$$2. F_{\min} = \mu g(m_1 + m_2/2).$$

$$3. l = \frac{v^2}{2\mu g} \frac{M}{M+m}.$$

$$4. Q \approx m(v - v_0)^2/2 = 81 \text{ Дж}.$$

$$5. Q = \rho g V(h_1 + h_2) - \rho_{\text{ж}} g V h_2.$$

Гидростатика

$$1. \Delta p = 3\rho_{\text{рт}} g \Delta h \approx 4 \text{ кПа}.$$

$$2. H = h \left(\frac{D}{d} \right)^2 \frac{\rho - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} = 7,2 \text{ см}.$$

$$3. m = \rho_{\text{в}} \pi R^2 h - M.$$

$$4. S = \frac{\Delta F}{\rho_{\text{в}} g \Delta h} = 6,25 \text{ см}^2.$$

5. Сила давления увеличится.

Механические колебания

$$1. v_0 = x_0 \sqrt{\frac{l+d/2}{g}} = 0,05 \text{ м/с}; F_0 = x_0 \frac{\pi d^3 g}{6} \frac{l+d/2}{g} = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

$$2. x_{01} = x_0 \sqrt{\frac{M}{M+m}}.$$

$$3. v_1 = v/\sqrt{2} = 0,28 \text{ Гц}; v_2 = \sqrt{2}v = 0,57 \text{ Гц}.$$

$$4. \omega_{\text{max}} = \sqrt{g/x_0}$$

$$5. N = \frac{t_1}{2\pi} \sqrt{\frac{g+a_1}{l}} + \frac{t_2}{2\pi} \sqrt{\frac{g-a_2}{l}}.$$

Системы отсчета в механике

$$1. v_0 \geq l \sqrt{\frac{g}{2h}}; \alpha = \arcsin \frac{h}{l}.$$

$$2. v_{\text{min}} = \sqrt{5gl}.$$

$$3. T = 2\pi l \sqrt{\frac{l}{GM}}.$$

Кинематические связи в задачах динамики

$$1. a_1 = g \frac{m_1 \sin^2 \alpha}{m_1 \sin^2 \alpha + m_2 \cos^2 \alpha}; a_2 = g \frac{m_1 \sin \alpha \cos \alpha}{m_1 \sin^2 \alpha + m_2 \cos^2 \alpha}.$$

$$2. T = \frac{4m_1 m_2 m_3 g}{4m_1 m_3 + m_2(m_1 + m_3)}.$$

$$3. a_1 = a_2 = g.$$

$$4. a = g \frac{m \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}.$$

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
<i>И. Слободецкий</i> КИНЕМАТИКА	4
<i>В. Грушин, А. Диденко, Г. Дубровский</i> ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	12
<i>Л. Асламазов</i> СИЛЫ ТРЕНИЯ И ДВИЖЕНИЕ	21
<i>А. Шеронов</i> КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ	29
<i>Л. Асламазов</i> СТАТИКА	36
<i>В. Можаяев</i> ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ	43
<i>В. Белонучкин</i> ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА И ШКОЛЬНАЯ ФИЗИКА	49
<i>И. Слободецкий</i> ИМПУЛЬС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА	56
<i>А. Черноуцан</i> ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ	67
<i>А. Черноуцан</i> ИЗМЕНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ	73
<i>А. Буздин, С. Кротов</i> ГИДРОСТАТИКА	82

<i>В. Тихомирова</i> МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ	94
<i>А. Черноуцан</i> СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА В МЕХАНИКЕ	103
<i>А. Черноуцан</i> КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СВЯЗИ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ	111
ОТВЕТЫ	122

Механика

Под редакцией
В. В. Можаяева и А. И. Черноуцана

Приложение к журналу «Квант» № 3/94

Редактор В. А. Тихомирова
Литературный редактор Л. В. Кардасевич
Художественный редактор С. А. Стулов
Технический редактор Е. С. Потапенкова
ИБ № 5

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская,
2/1, «Квант», тел. 250-33-54

Формат 84×108 1/32. Бумага офс. нейтр.
Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4. Тираж 30 000 экз.
Заказ 3053. Цена договорная.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Комитета Российской Федерации по печати
142300, г. Чехов Московской области